

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ МІСЬКОГО
ГОСПОДАРСТВА імені О. М. Бекетова

Методичні вказівки
до практичних занять, самостійної роботи,
виконання контрольних і розрахунково-графічних завдань
з курсу

БУДІВЕЛЬНА МЕХАНІКА СПЕЦКУРС
ЧАСТИНА 1

*(для студентів 3, 4 курсів денної і заочної форм навчання бакалаврів за
напрямом 6.060101 - «Будівництво»)*

ХАРКІВ – ХНУМГ – 2014

Методичні вказівки до практичних занять, самостійної роботи, виконання контрольних і розрахунково-графічних завдань з курсу «Будівельна механіка спецкурсу» / частина 1 (для студентів 3 курсу денної і заочної форм навчання бакалаврів за напрямом 6.060101 - «Будівництво») / Харк. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова; уклад.: М. А. Засядько. – Х.: ХНУМГ, 2014. – 56 с.

Укладач: М. А. Засядько

Рецензент: О. О. Чупринін

Рекомендовано кафедрою теоретичної і будівельної механіки,
протокол № 11 від 21.05.14р.

Зміст

Розділ 1 Практичні заняття та самостійна робота.....	4
1.1 Розрахунок статично невизначуваних рам методом сил.....	4
1.2 Розрахунок статично невизначуваних ферм.....	15
1.3 Розрахунок статично невизначуваних арок.....	20
1.4 Розрахунок комбінованих систем.....	27
1.5 Метод переміщень.....	29
Розділ 2 Матеріали для контрольних та самостійних робіт.....	39
2.1 Розрахунок статично невизначуваних рам методом сил.....	39
2.2 Розрахунок статично невизначуваних ферм.....	41
2.3 Розрахунок рам методом переміщень.....	43
Розділ 3 Розрахунково-графічні роботи.....	45
3.1 Розрахунок статично невизначуваної рами методом сил.....	45
3.2 Розрахунок статично невизначуваної ферми.....	48
3.3 Розрахунок рами методом переміщень.....	51
Список джерел.....	55

Розділ 1 Практичні заняття та самостійна робота

1.1 Розрахунок статично невизначуваних рам методом сил

Теоретичний матеріал та питання для самоперевірки наведені у гл. 1,2 [2], гл. 1,2 [5] та ін..

Вправи

1.1 Для рами, наведеної на рис 1.1,а, побудувати епюри внутрішніх зусиль від заданого навантаження.

Розв'язання. Обчислюємо кількість зайвих в'язей:

$$n = 3 \cdot K - III + C_0 - 3 = 3 \cdot 0 - 0 + 6 - 3 = 3.$$

Отже, *ступінь статичної невизначуваності* рами становить 3. Інакше, рама тричі статично невизначувана.

Намічаємо кілька різних варіантів відкидання зайвих в'язей (рис. 1.1,б,в,г). Порівнюючи ці варіанти між собою, *обираємо основну систему*, наведену на рис. 1.1,б, як таку, що найбільш проста для розрахунку. Дійсно, у цьому варіанті ми маємо для розрахунку ліву Г-подібну консольну частину та праву, також Г-подібну частину рами на двох шарнірних опорах.

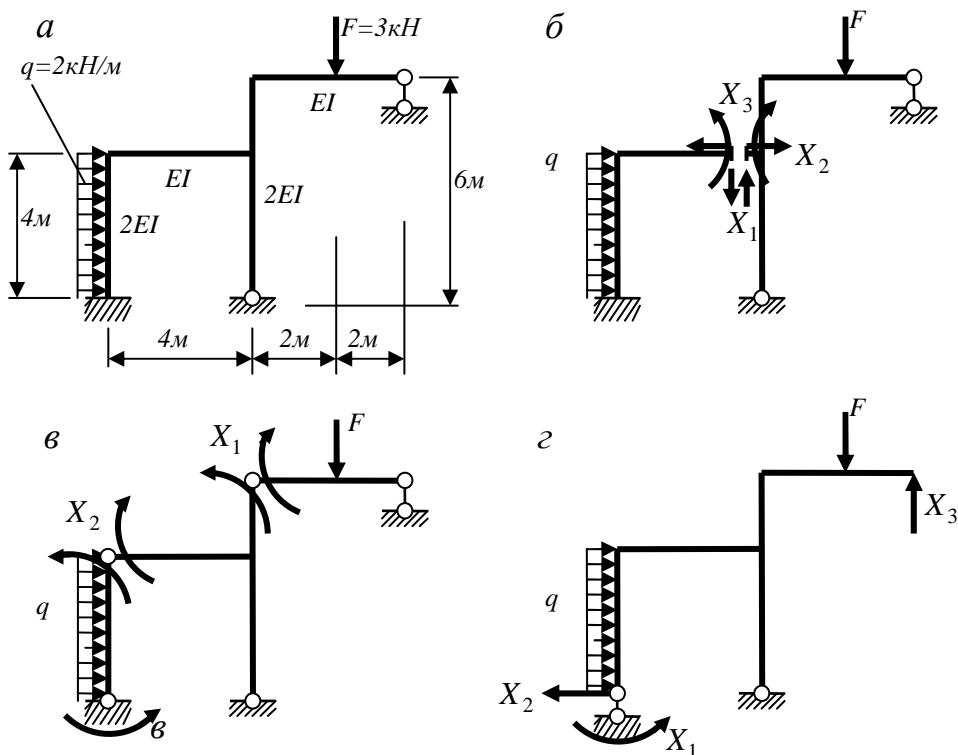


Рис. 1.1

Канонічні рівняння мають такий вид:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1f} = 0;$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2f} = 0;$$

$$\delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3f} = 0.$$

Виконуючи розрахунок основної системи окремо на дію кожного із зайвих невідомих $X_1=1$; $X_2=1$; $X_3=1$ та окремо на дію заданого навантаження, будемо одиничні (\bar{M}_1 ; \bar{M}_2 ; \bar{M}_3) та вантажну (M_f) епюри моментів в основній системі (рис. 1.2).

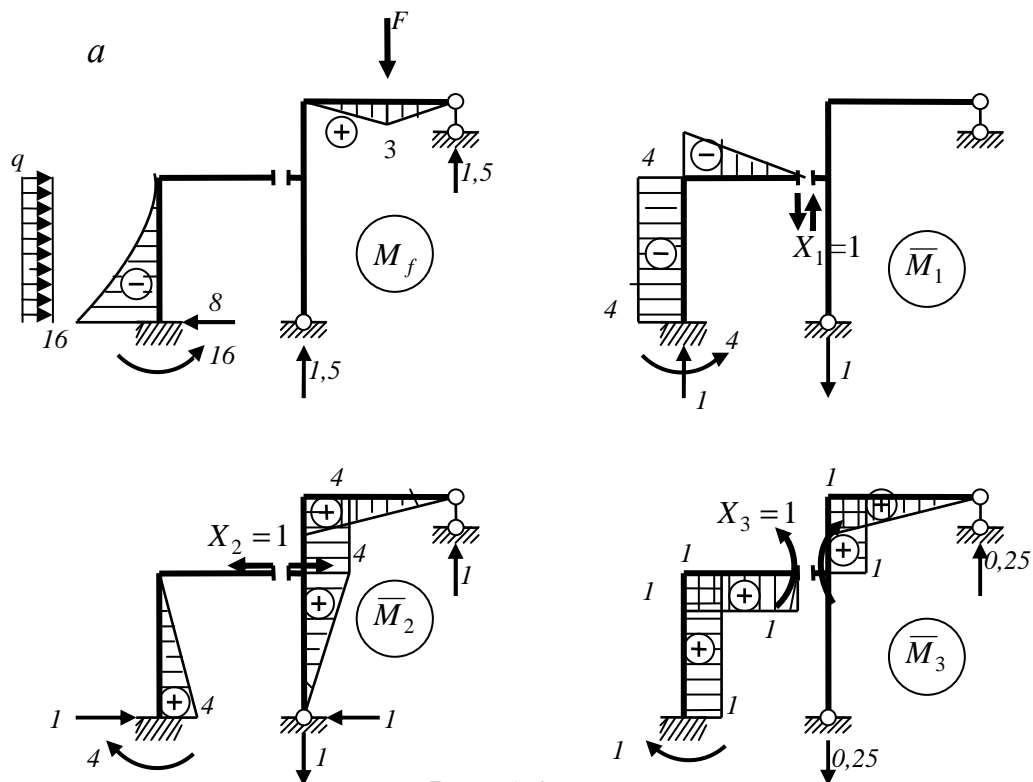


Рис. 1.2

Застосовуючи метод Мора, перемноженням епюр за правилом Верещагіна та за формулою Сімпсона обчислюємо коефіцієнти та вільні члени канонічних рівнянь:

$$\delta_{11} = \frac{1}{2EI} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 + \frac{1}{EI} \cdot \frac{4 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{53,33}{EI};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{1}{2EI} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} = -\frac{16}{EI};$$

$$\delta_{13} = \delta_{31} = -\frac{1}{2EI} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 1 - \frac{1}{EI} \cdot \frac{4 \cdot 4}{2} \cdot 1 = -\frac{16}{EI};$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{4 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{4 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{2EI} \cdot 4 \cdot 2 \cdot 4 + \frac{1}{EI} \cdot \frac{4 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{58,67}{EI};$$

$$\delta_{23} = \delta_{32} = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{4 \cdot 4}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2EI} \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 + \frac{1}{EI} \cdot \frac{4 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{13,33}{EI};$$

$$\delta_{33} = \frac{1}{2EI} \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{EI} \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{2EI} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{EI} \cdot \frac{4 \cdot 1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8,33}{EI};$$

$$\Delta_{1f} = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{16 \cdot 3}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot 4 = \frac{42,67}{EI};$$

$$\Delta_{2f} = -\frac{1}{2EI} \cdot \frac{16 \cdot 4}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot 4 + \frac{1}{EI} \cdot \frac{3 \cdot 4}{2} \cdot \frac{4}{2} = -\frac{20}{EI};$$

$$\Delta_{3f} = -\frac{1}{2EI} \cdot \frac{16 \cdot 4}{3} \cdot 1 + \frac{1}{EI} \cdot \frac{3 \cdot 4}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{7,67}{EI}.$$

Підставляючи одержані переміщення у канонічні рівняння, після помноження на EI одержуємо:

$$53,33 X_1 - 16 X_2 - 16 X_3 + 42,67 = 0;$$

$$-16 X_1 + 58,67 X_2 + 13,33 X_3 - 20 = 0;$$

$$-16 X_1 + 13,33 X_2 + 8,33 X_3 - 7,67 = 0.$$

Розв'язання цієї системи лінійних алгебраїчних рівнянь можна виконати будь-яким відомим методом. В результаті отримуємо:

$$X_1 = -1,497 \text{ кН}; X_2 = 0,689 \text{ кН}; X_3 = -2,878 \text{ кН м}.$$

Будуємо епюру згинаючих моментів для заданої рами. Для цього використовуємо принцип незалежності дії сил:

$$M = M_1 + M_2 + M_3 + M_f.$$

Виправлені епюри згинаючих моментів побудовані на рис. 1.3, а, б, в помноженням ординат одиничних епюр на відповідні зайві невідомі ($M_i = \bar{M}_i \cdot X_i$).

Підсумовуючи виправлені та вантажну епюри, одержуємо остаточну епюру згинаючих моментів M (рис. 1.3, г).

Виконуємо перевірку епюри моментів:

Для статичної перевірки розглядаємо рівновагу вузлів. Перевірка рівноваги двохстержневих вузлів може бути виконана формально повертаючи стержні разом з епюрами до прямої лінії. Як бачимо, ординати епюр при цьому співпадають, отже ці вузли врівноважені. Для перевірки рівноваги тристержневого вузла вирізаємо його (рис. 1.3, д) і записуємо рівняння рівноваги під дією вузлових моментів:

$$\sum M = 2,89 - 0,52 - 2,36 \approx 0.$$

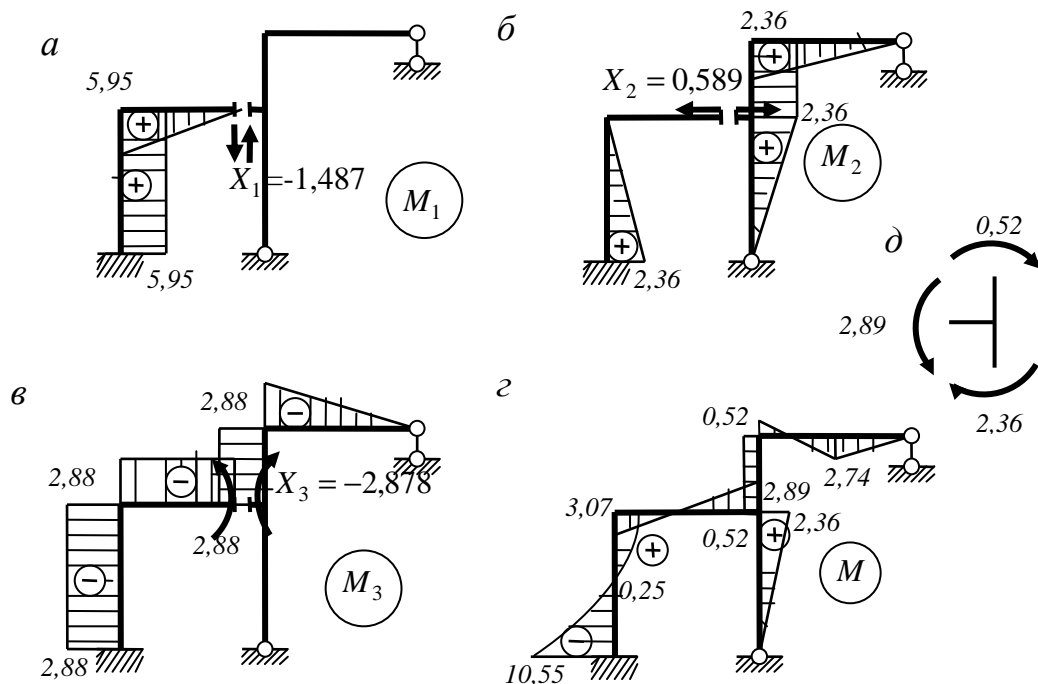


Рис. 1.3

Отже, статичні рівняння задовольняються.

Для кінематичної перевірки перемножимо остаточну епюру моментів з одиничними:

$$\begin{aligned} \sum \frac{1}{EI} \int M \cdot \bar{M}_1 dx &= \frac{1}{2EI} \frac{4}{6} (10,55 \cdot 4 - 4 \cdot 0,25 \cdot 4 - 3,07 \cdot 4) + \\ &+ \frac{1}{EI} \frac{4 \cdot 4}{2} \left(\frac{1}{3} 2,89 - \frac{2}{3} 3,07 \right) = \frac{1}{EI} (8,64 - 8,67) = \frac{0,03}{EI} \approx 0; \\ \sum \frac{1}{EI} \int M \cdot \bar{M}_2 dx &= \frac{1}{2EI} \frac{4}{6} (-10,55 \cdot 4 + 4 \cdot 0,25 \cdot 2 + 3,07 \cdot 0) + \\ &+ \frac{1}{2EI} \frac{4 \cdot 4}{2} \frac{2}{3} 2,36 - \frac{1}{2EI} 0,52 \cdot 2 \cdot 4 - \frac{1}{EI} \frac{0,52 \cdot 4}{2} \frac{2}{3} 4 + \\ &+ \frac{1}{EI} \frac{3 \cdot 4}{2} \frac{1}{2} 4 = \frac{1}{EI} (-18,25 + 18,29) = \frac{0,04}{EI} \approx 0; \\ \sum \frac{1}{EI} \int M \cdot \bar{M}_3 dx &= \frac{1}{2EI} \frac{4}{6} (-10,55 \cdot 1 + 4 \cdot 0,25 \cdot 1 + 3,07 \cdot 1) + \\ &+ \frac{1}{EI} 1 \cdot 4 \cdot \frac{3,07 - 2,89}{2} - \frac{1}{2EI} 0,52 \cdot 2 \cdot 1 - \frac{1}{EI} \frac{0,52 \cdot 4}{2} \frac{2}{3} \cdot 1 + \\ &+ \frac{1}{EI} \frac{3 \cdot 4}{2} \frac{1}{2} = \frac{1}{EI} (-3,37 + 3,36) = -\frac{0,01}{EI} \approx 0. \end{aligned}$$

Отже, і кінематичні рівняння задовольняються: - епюра моментів побудована вірно.

Поперечні сили обчислюємо за таким співвідношенням:

$$Q_{\text{лів}}^{\text{прав}} = \frac{M_{\text{прав}} - M_{\text{лів}}}{l} \pm \frac{q l}{2}.$$

Одержуємо такі значення:

$$Q_{1_{\text{лів}}^{\text{прав}}} = \frac{3,07 + 10,55}{4} \pm \frac{2 \cdot 4}{2} = 3,41 \pm 4 = \begin{bmatrix} 7,41 \text{ кН} \\ -0,59 \text{ кН} \end{bmatrix};$$

$$Q_2 = \frac{-2,89 - 3,07}{4} = -1,49 \text{ кН}; \quad Q_3 = \frac{2,36 - 0}{4} = 0,59 \text{ кН};$$

$$Q_4 = \frac{-0,52 + 0,52}{2} = 0;$$

$$Q_5 = \frac{2,74 + 0,52}{2} = 1,63 \text{ кН}; \quad Q_6 = \frac{0 - 2,74}{2} = -1,37 \text{ кН}.$$

За цими даними на рис. 1.4,а побудовано епюру поперечних сил.

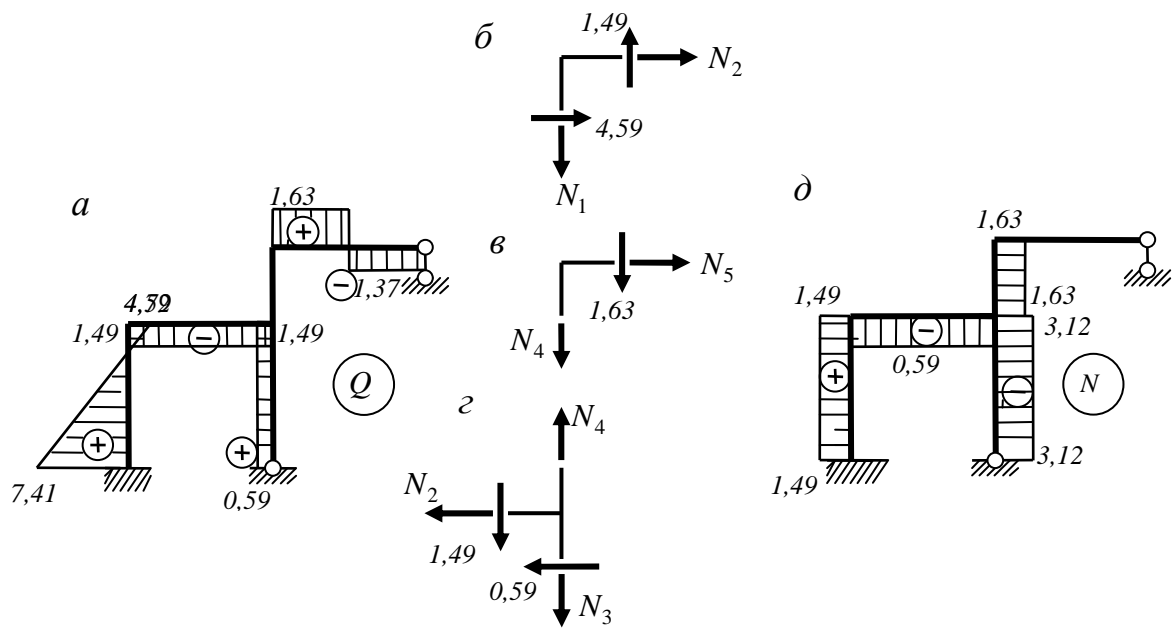


Рис. 1.4

Поздовжні сили визначаємо з рівноваги вузлів.

З рівноваги двостержневого вузла лівого ригеля (рис. 1.4,б) маємо:

$$\sum x = 4,59 + N_2 = 0; \quad N_2 = -4,59 \text{ кН};$$

$$\sum y = 1,49 - N_1 = 0; \quad N_1 = 1,49 \text{ кН}.$$

З рівноваги вузла правого ригеля (рис. 1.4,в) маємо:

$$\sum x = N_5 = 0;$$

$$\sum y = -1,63 - N_4 = 0; \quad N_4 = -1,63 \text{ кН} /$$

З рівноваги правого вузла лівого ригеля (рис. 1.4,з) маємо:

$$\sum y = -1,49 + N_4 - N_3 = 0; \quad N_3 = -1,49 - 1,63 = -3,12 \text{ кН}.$$

Друге рівняння рівноваги цього вузла можна використати для перевірки правильності розрахунку:

$$\sum x = -0,59 - N_2 = -0,59 + 0,59 \approx 0.$$

За цими даними на рис. 1.4,д побудована епюра поздовжніх сил.

Усі перевірки задовольняються, отже розрахунок виконано правильно.

При розрахунку за допомогою комп'ютера після побудування епюр моментів в основній системі складаємо такі вихідні матриці:

$L^T = [4 \ 4 \ 4 \ 2 \ 2 \ 2]$ - транспонований вектор довжин ділянок рами;

$K^T = [2 \ 1 \ 2 \ 2 \ 1 \ 1]$ - транспонований вектор коефіцієнтів жорсткості ділянок рами,

а також матриці вантажних та одиничних моментів на ділянках рами:

$$M_f = \begin{bmatrix} -16 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,5 & 3 \\ 3 & 1,5 & 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{M}_1 = \begin{bmatrix} -4 & -4 & -4 \\ -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\bar{M}_2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{M}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0,75 & 0,5 \\ 0,5 & 0,25 & 0 \end{bmatrix}$$

Нагадаємо що верхній індекс «Т» у позначення матриці означає операцію транспонування, тобто заміни стовбців на рядки.

Послідовність огляду ділянок прийнятий від низу лівого стояка доверху, далі зліва направо - лівий ригель, далі знизу доверху - правий стояк і, нарешті, зліва направо - правий ригель. Кожен рядок матриці моментів відповідає певній ділянці, для якої записані значення згинаючих моментів на початку, в середині та кінці цієї ділянки.

Для розрахунку використовуємо програму «Метод сил. Рама» операційної системи OpenOffice.org.

Після внесення даних матриць у відповідні комірки одержуємо значення остаточних моментів у вигляді матриці, аналогічної матрицям моментів в основній системі:

$$M = \begin{bmatrix} -10,57 & 0,25 & 3,07 \\ 3,07 & 0,10 & -2,88 \\ 0 & 1,18 & 2,36 \\ -0,52 & -0,52 & -0,52 \\ -0,52 & 1,12 & 2,74 \\ 2,74 & 1,37 & 0 \end{bmatrix}.$$

Як бачимо, одержані значення практично співпадають з обчисленими раніше.

Подальше визначення поперечних та поздовжніх сил виконується як і раніше.

1.2 Обрати основну систему для рами ,наведеної на рис. 1.5,*а*.

Розв'язання. Ступінь статичної невизначуваності:

$$n = 3 \cdot 1 - 2 + 4 - 3 = 2.$$

Рама двічі статично невизначувана (має дві зайві в'язі).

При виборі основної системи в першу чергу необхідно відкинути зайві в'язі у замкнутому контурі. Для заданої рами це можна зробити поставивши додатковий шарнір у контурі (рис. 1.5,*б*), або провести розріз через ідеальний стержень (рис. 1.5,*в*). При цьому відкидається по одній в'язі. Другу в'язь в обох випадках можна відкинути за рахунок заміни однієї з шарнірно нерухомих опор шарнірно рухомою.

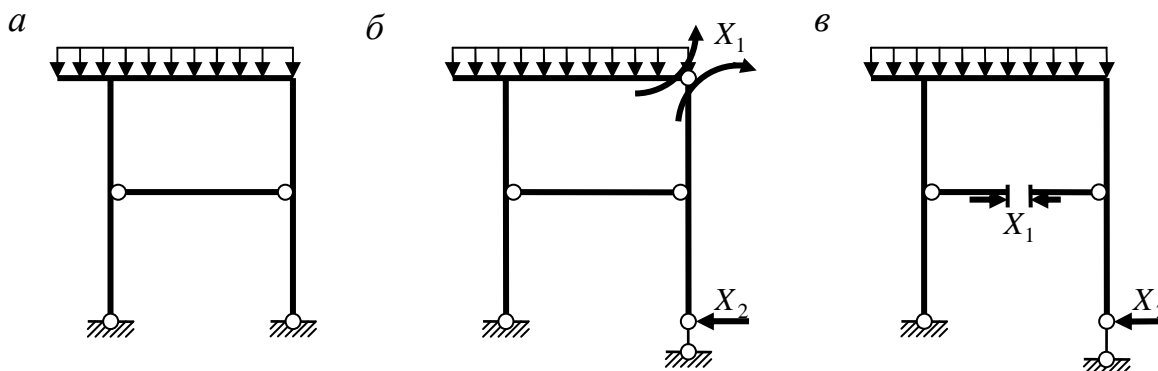


Рис. 1.5

Порівнюючи ці основні системи, для розрахунку обираємо систему з розімкнутим контуром (рис. 1.5,*в*) як більш зручну для розрахунку.

1.3 Враховуючи симетрію, обрати основну систему та побудувати епюри згинаючих моментів в основній системі для рами, наведеної на рис. 1.6,а. Жорсткість усіх стержнів прийняти однаковою.

Розв'язання. Ступінь статичної невизначуваності становить $n = 3 \cdot 0 - 0 + 9 - 3 = 6$, отже рама шість разів статично невизначувана (має шість зайвих в'язей).

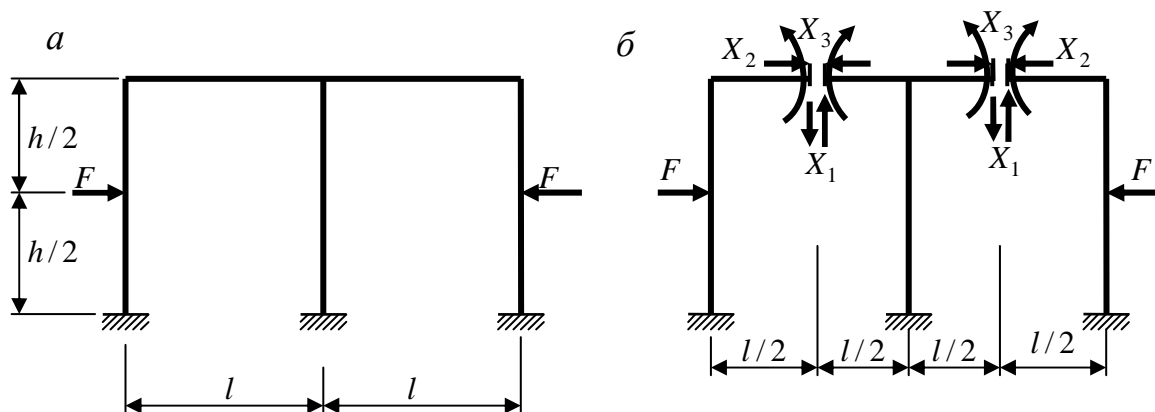


Рис. 1.6

Зважаючи на симетрію рами обираємо основну систему розрізавши раму у серединах ригелів, тобто зберігаючи симетрію. За умови симетрії навантаження застосовуємо групові невідомі – внутрішні зусилля у перерізах. При цьому залишаємо тільки симетричні невідомі, оскільки при симетричному навантаженні кососиметричні невідомі обертаються на нуль. Обрана основна система зручна для розрахунку і скорочує кількість невідомих з шести (при довільній основній системі) до трьох і система канонічних рівнянь має такий вид:

$$\begin{aligned}\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1f} &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2f} &= 0; \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3f} &= 0.\end{aligned}$$

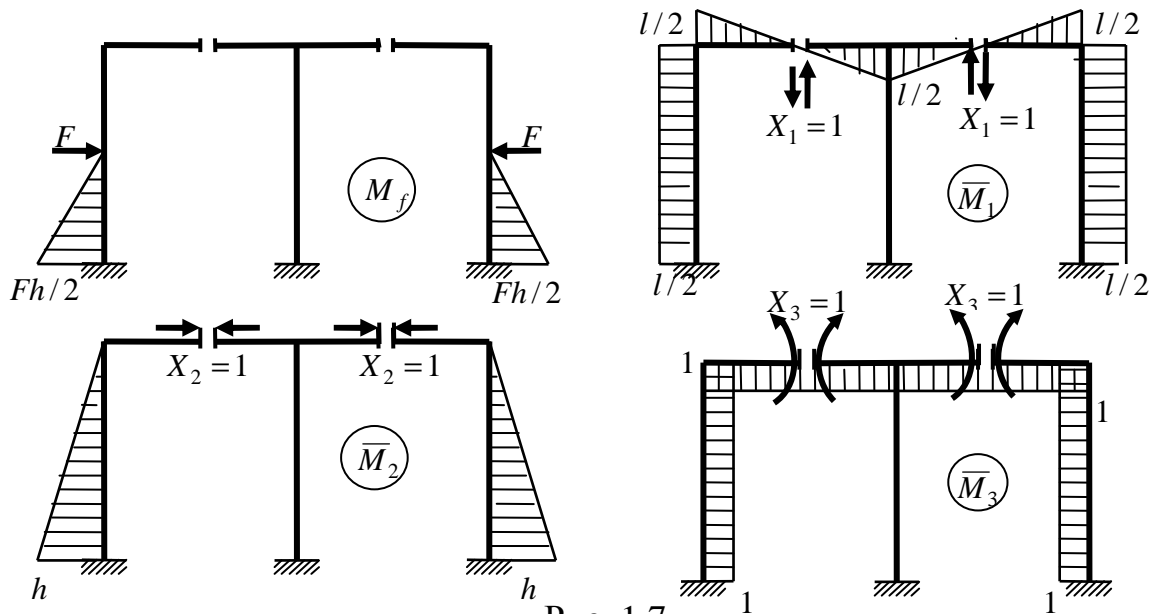


Рис. 1.7

Епюри згинаючих моментів у обраній основній системі наведені на рис. 1.7.

Подальший розрахунок нічим не відрізняється від розрахунку довільної рами. Бажано виконати його самостійно.

1.4 Для рами, наведеної на рис. 1.8,а, обрати основну систему метода сил та побудувати одиничні епюри згинаючих моментів в основній системі.

Розв'язання Обчислюємо ступінь статичної невизначуваності

$$n = 3 \cdot 1 - 0 + 5 - 3 = 5.$$

Отже, рама п'ять раз статично невизначувана (має п'ять зайвих в'язей).

Обираючи основну систему, в першу чергу відкинемо симетричні в'язі: розріжемо верхній ригель на осі симетрії і відкинемо шарнірно-рухому опору. Для відкидання п'ятої в'язі замінимо праву шарнірно-нерухому опору шарнірно-рухомою (рис. 1.8,б).

Зважаючи на те, що навантаження косиметричне, симетричні сили: момент та поздовжня сила у перерізі на осі симетрії, а також вертикальна реакція у середній опорі дорівнюють нулю. Отже, ненульовими будуть лише поперечна сила у перерізі і горизонтальна реакція у правій опорі.

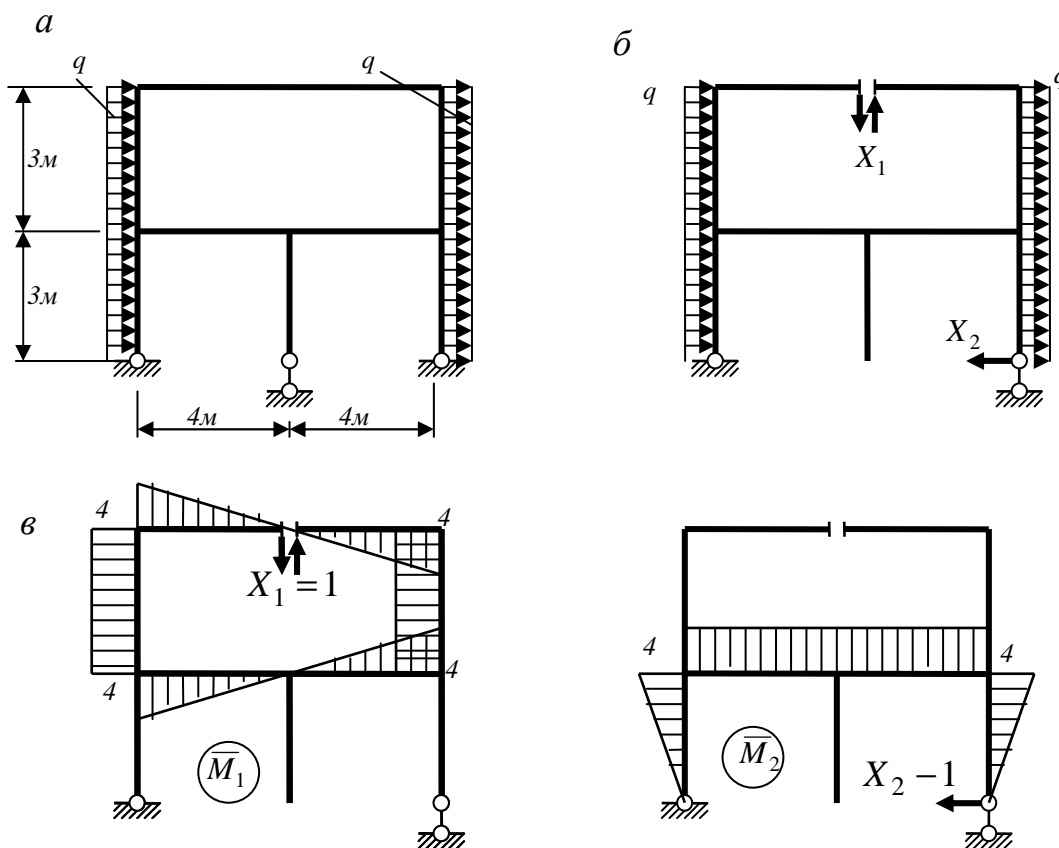


Рис. 1.8

Канонічні рівняння мають такий вид:

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1f} = 0;$$

$$\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2f} = 0.$$

Епюри згинаючих моментів від одиничних зайвих невідомих наведені на рис 1.8,в.

Подальший розрахунок бажано виконати самостійно.

1.5 Обрати основну систему, побудувати епюри згинаючих моментів в основній системі та визначити коефіцієнти канонічних рівнянь для рами, наведеної на рис. 1.9,а. Жорсткість усіх стержнів прийняти однаковою.

Розв'язання

При визначенні ступеня статичної невизначуваності рами звертаємо увагу на те, що вона не має опор. Оскільки це може бути лише у тому разі, коли рама урівноважена, додавання статично визначуваних (трьох) в'язей не змінює її напружено-деформований стан. Отже, в формулі для кількості зайвих в'язей можна поставити $C_0 = 3$, або просто виключити з неї останні два доданки:

$n = 3K - III = 3 \cdot 1 - 2 = 1$. Рама один раз статично невизначувана.

При виборі основної системи врахуємо, що рама має вертикальну вісь симетрії, отже згинаючі моменти у нижніх вузлах рами будуть однаковими. Тоді ставимо шарніри в обидва нижні вузли і приймаємо групове невідоме X_1 - згинаючі моменти у вузлах (рис. 1.9,б).

Канонічне рівняння буде одне: $\delta_{11}X_1 + \Delta_{1f} = 0$.

Завдяки раціонально обраній основній системі побудування епюр згинаючих моментів в основній системі зводиться до розрахунку чотирьох окремих балок-стержнів з шарнірними опорами на кінцях. Ці епюри наведені на рис 1.9,в,г. До речі, моменти на стояках при трикутному навантаженні змінюються за законом кубічної параболи: $M_f = \frac{q}{6}x(l - \frac{x^2}{l})$.

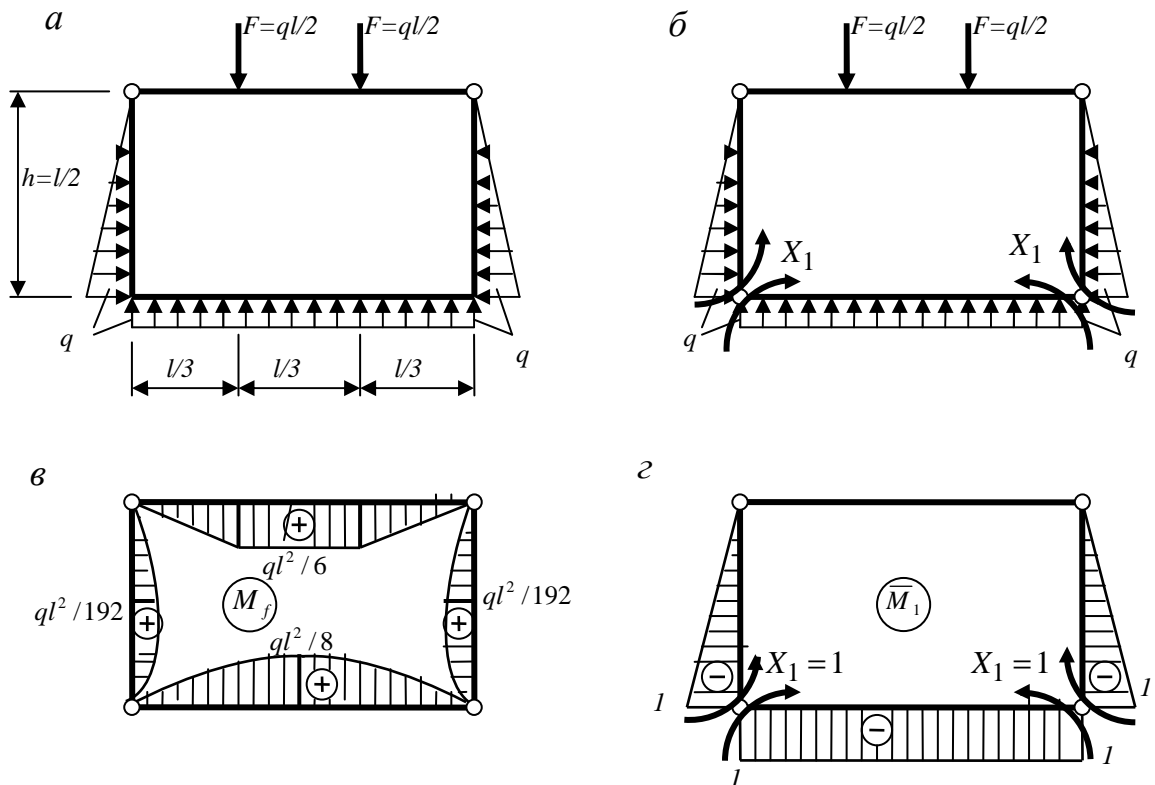


Рис. 1.9

При обчисленні вантажного переміщення окремо визначимо значення інтегралу Мора на стояках. Оскільки маємо складну вантажну епюру, виконуємо безпосереднє інтегрування:

$$\int_0^{l/2} \bar{M}_1 M_f dx = \int_0^{l/2} \left(-\frac{2x}{l} \right) \left[\frac{q}{6} x \left(l - \frac{x^2}{l} \right) \right] dx = -0,01181ql^3,$$

де $\bar{M}_1 = -\frac{2x}{l}$ - згинаючий момент у межах стояка.

Тепер одержуємо такі значення переміщень:

$$\Delta_{1f} = \frac{1}{EI} \left[-2 \cdot 0,01181ql^3 - \frac{2}{3} \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot l \cdot 1 \right] = -0,1069ql^3;$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left(1 \cdot l \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{3} \right) = 1,667 / EI.$$

Подальший розрахунок бажано виконати самостійно.

1.2 Розрахунок статично невизначуваних ферм

Статично невизначувані ферми зручно виконувати методом сил. Теоретичний матеріал та питання для самоперевірки наведено у гл. 4.1 [2], гл. 3 [5] та ін.

Вправи

1.6 Для ферми, наведеної на рис.1.10,а, визначити зусилля від заданого навантаження при співвідношенні жорсткостей поясів та ґраток $EI_p : EI_c = 2 : 1$.

Розв'язання Ступінь статичної невизначуваності становить:

$$n = C + C_0 - 2Y = 18 + 3 - 2 \cdot 10 = 1.$$

Отже, ферма один раз статично невизначувана (має одну зайву в'язь).

Оскільки ця ферма має мінімально необхідну для геометричної незмінюваності кількість опорних в'язей – 3, при виборі основної системи можна відкинути тільки внутрішню в'язь: розрізати стержень ферми. Один з варіантів основної системи, який приймемо для подальшого розрахунку, наведений на рис. 1.10,б.

Канонічне рівняння у випадку одного зайвого невідомого має такий вид:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1f} = 0.$$

Далі виконуємо розрахунок основної системи на задане навантаження (рис. 1.10,в). При ручному розрахунку по-перше необхідно визначити опорні реакції:

$$\sum M_A = R_{Bf} \cdot 16 - 20 \cdot 4 - 10 \cdot 8 = 0; \Rightarrow R_{Bf} = 10 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = -R_{Af} \cdot 16 + 10 \cdot 16 + 20 \cdot 12 + 10 \cdot 8 = 0; \Rightarrow R_{Af} = 30 \text{ кН}.$$

Далі застосуємо спосіб вирізання вузлів. При відсутності сили X_1 (розрахунок на задане навантаження) зусилля у розрізаному стержні $N_{2-7} = 0$. Тепер вузол 7 (номера вузлів наведені на рис. 1.10,а) є незавантаженим

двостержневим вузлом, отже обидва стержні у ньому нульові: $N_{6-7} = N_{7-10} = 0$. Далі за звичайною схемою вирізаємо вузол 2 і з умов його рівноваги знаходимо зусилля N_{2-6} та N_{2-10} і т.д. Результати розрахунку наведені на стержнях основної системи (рис. 1.10,в).

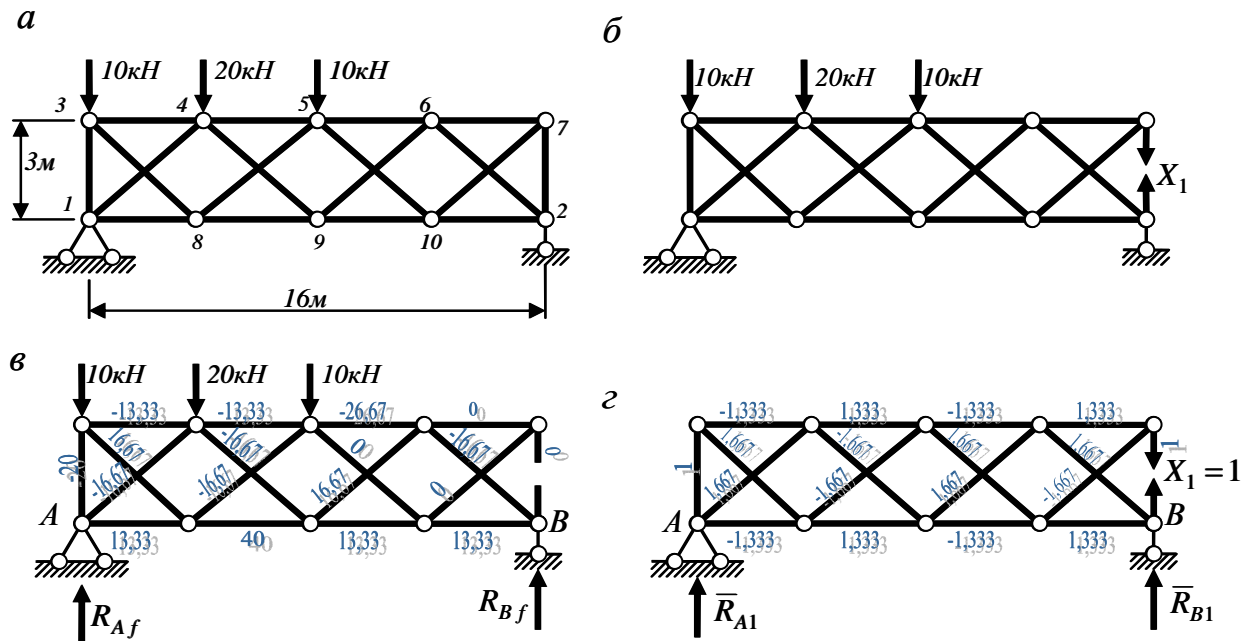


Рис. 1.10

Аналогічно виконуємо розрахунок основної системи на дію сили $X_1 = 1$ (рис. 1.10,г). Зауважимо, що у цьому випадку реакції опор будуть нульовими, оскільки навантаження (дві сили X_1) врівноважують одна одну і у рівняннях рівноваги ферми дають нульову складову. Визначення зусиль у стержнях можна виконати аналогічно розрахунку на задане навантаження. Результати цього розрахунку наведені на (рис. 1.10,г).

Зауважимо, що розрахунок основної системи як балочної ферми можна виконати і за допомогою комп'ютера (програма «Ферма ст.. визн.» операційної системи OpenOffice.org).

Подальший розрахунок вручну зручно виконати у табличній формі (табл. 1.1).

Перші шість стовпчиків цієї таблиці містять дані про довжини, співвідношення жорсткостей стержнів та зусилля в стержнях основної системи. Для визначення співвідношення жорсткостей приймемо за основну жорсткість $EA_0 = EA_n$ перерізів поясів. Тоді для стержнів поясів маємо $EA_0 / EA_n = 1$, а для стержнів ґраток - $EA_0 / EA_z = 2$.

Таблица 1.1

Элемент ферми	Стержень	l . м	$\frac{A_0}{A}$	\bar{N}_1	N_f	$\bar{N}_1 l \frac{A_0}{A}$	$\bar{N}_1 \bar{N}_1 l \frac{A_0}{A}$	$\bar{N}_1 N_f l \frac{A_0}{A}$	$\bar{N}_1 X_1$	N	$\bar{N}_1 N l \frac{A_0}{A}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Пояси	3-4	4	1	-1,333	-13,33	-5,332	7,108	71,08	5,84	-7,49	39,94
	4-5	4	1	1,333	-13,33	5,332	7,108	-71,08	-5,84	-19,17	-102,21
	5-6	4	1	-1,333	-26,67	-5,332	7,108	142,20	5,84	-20,83	111,07
	6-7	4	1	1,333	0	5,332	7,108	0	-5,84	-5,84	-31,14
	1-8	4	1	-1,333	13,33	-5,332	7,108	-71,08	5,84	19,17	-102,21
	8-9	4	1	1,333	40,0	5,332	7,108	213,28	-5,84	34,16	176,81
	8-10	4	1	-1,333	13,33	-5,332	7,108	-71,08	5,84	19,17	-102,21
	2-10	4	1	1,333	13,33	5,332	7,108	71,08	-5,84	7,49	39,94
Гратки	1-3	3	2	1,0	-20,0	6,0	6,0	-120,0	-4,38	-24,38	-146,28
	3-8	5	2	1,667	16,67	16,67	27,79	277,89	-7,30	9,37	156,20
	1-4	5	2	1,667	-16,67	16,67	27,79	-277,89	-7,30	-23,97	-399,58
	4-8	5	2	-1,667	-16,67	-16,67	27,79	277,89	7,30	-9,37	156,20
	5-8	5	2	-1,667	-16,67	-16,67	27,79	277,89	7,30	-9,37	156,20
	5-10	5	2	1,667	0	16,67	27,79	0	-7,30	-7,30	-121,69
	6-9	5	2	1,667	16,67	16,67	27,79	277,89	-7,30	9,37	156,20
	2-6	5	2	-1,667	-16,67	-16,67	27,79	277,89	7,30	-9,37	156,20
	7-10	5	2	-1,667	0	-16,67	27,79	0	7,30	7,30	-121,69
	2-7	3	2	1,0	0	6,0	6,0	0	-4,38	-4,38	-26,28
$\Sigma=$							291,18	1275,96			1148,75 -1153,29

У стовбцях 7...9 обчислюються коефіцієнт та вільний член канонічного рівняння. Підсумовування у стовпчиках 8 та 9 дають їх значення:

$$EA_0 \delta_{11} = \sum \bar{N}_1 \bar{N}_1 l \frac{EA_0}{EA} = 291,18; \quad EA_0 \Delta = \sum \bar{N}_1 N_f l \frac{EA_0}{EA} = 1275,96$$

З канонічного рівняння маємо:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1f}}{\delta_{11}} = -\frac{EA_0 \Delta_{1f}}{EA_0 \delta_{11}} = -\frac{1275,96}{291,18} = -4,38 \text{ кН}.$$

Далі у стовпчиках 10,11 обчислюємо остаточні зусилля у стержнях заданої рами за виразом $N = N_f + \bar{N}_1 X_1$.

У останньому стовпчику таблиці виконуємо обчислення для кінематичної перевірки розрахунку. За результатами підсумовування маємо абсолютну похибку розрахунку таку: $\Delta = 1148,75 - 1153,29 = -4,54$. Відносна похибка становить

$$\varepsilon = \frac{4,54}{\frac{1148,75 + 1153,29}{2}} \cdot 100\% = 0,4\% \approx 0, \text{ отже розрахунок виконано}$$

правильно.

Цей розрахунок можна виконати на комп'ютері за допомогою програми «Метод сил. Ферма» операційної системи OpenOffice.org.

Для розрахунку на комп'ютері необхідно скласти такі вихідні матриці:

$$L^T = [4; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 3; 5; 5; 5; 5; 5; 5; 5; 5; 3] \quad - \text{транспонований вектор}$$

довжин стержнів;

$$A^T = [1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2] \quad - \text{транспонований вектор}$$

співвідношень площин перерізів стержнів;

$$N_f^T = [-13,33; -13,33; -26,67; 0; 13,33; 40; 13,33; 13,33; -20; 16,67; -16,67; -16,67; -16,67; 0; 16,67; -16,67; 0; 0] \quad -$$

транспонований вектор зусиль у стержнях основної системи від навантаження;

$$\bar{N}_1^T = [-1,333; 1,333; -1,333; 1,333; -1,333; 1,333; -1,333; 1,333; 1; 1,667; 1,667; -1,667; -1,667; 1,667; 1,667; -1,667; -1,667; 1]$$

- транспонований вектор зусиль у стержнях основної системи від одиничного зайвого невідомого.

Зауважимо, що послідовність запису даних у векторах відповідає послідовності їх запису у табл. 1.1.

Результат розрахунку наведемо також у вигляді транспонованого вектора

$$N = [-7,49; -19,17; -20,83; -5,84; 19,17; 34,16; 19,17; 7,49; -24,38; 9,37; -23,98; -9,37; -9,37; -7,31; 9,37; -9,37; 7,31; -4,38]$$

1.7 Обрати основну систему та визначити зусилля в стержнях основної системи для ферми, наведеної на рис. 1.11,а.

Розв'язання

Ступінь статичної невизначуваності становить:

$$n = 19 + 3 - 2 \cdot 10 = 2$$

Зберігаючи симетрію ферми, обираємо основну систему з розрізаними симетрично розташованими стержнями у статично невизначуваній частині ферми (рис. 1.11,б). Оскільки навантаження симетричне, зусилля у цих стержнях буде однаковим. Його й приймаємо у якості групового зайвого невідомого X_1 .

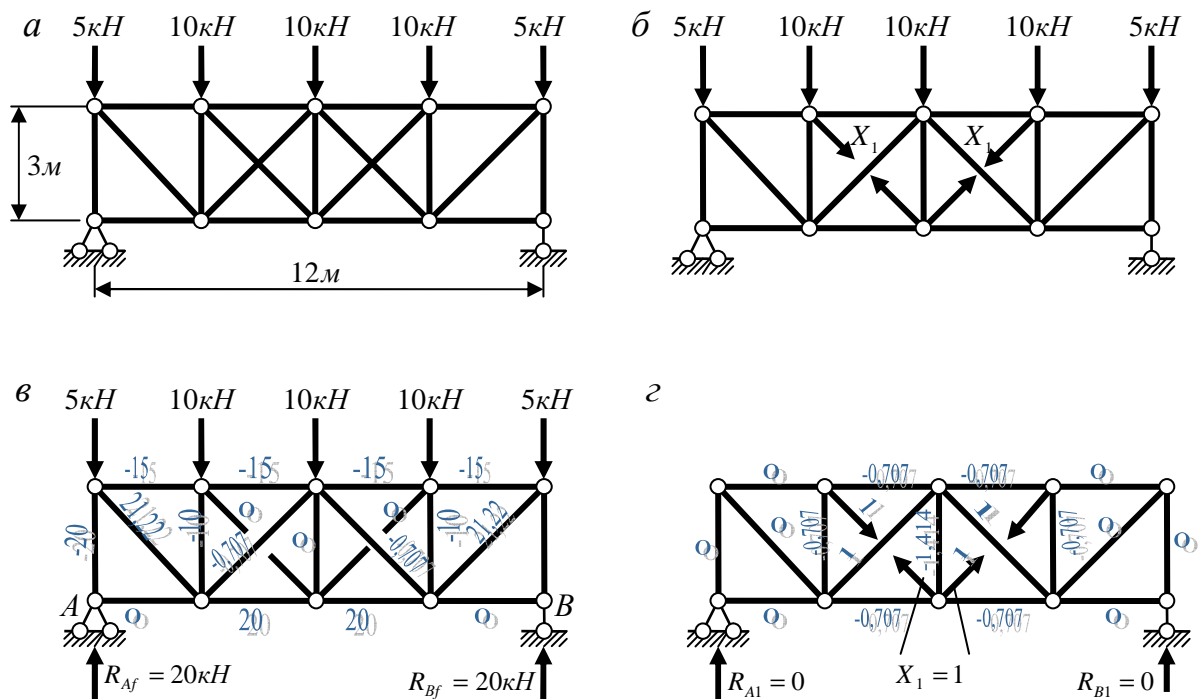


Рис. 1.11

Канонічне рівняння має звичайний вид для системи з одним зайвим невідомим:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1f} = 0.$$

Результати розрахунку основної системи на задане навантаження та одиничне зайве невідоме наведені на рис. 1.11,в,г.

Подальший розрахунок може бути виконаний у табличній формі або на комп'ютері.

1.3 Розрахунок статично невизначуваних арок

Розрахунок статично невизначуваних арок зазвичай виконують методом сил. Теоретичний матеріал та запитання для самоперевірки наведені у п.п. 4.2, 4.3 [2] та гл. 4 [5].

Вправи

1.8 Побудувати епюри внутрішніх зусиль для параболічної арки, наведеної на рис. 1.12,а. Жорсткості перерізів арки змінюються за таким законом: $\frac{EI_0}{EI} = \cos \varphi$ (I_0 - момент інерції замкового перерізу арки). Вважати арку пологою та гнучкою.

Розв'язання Ступінь статичної невизначуваності двохарнірної арки становить 1. У якості основної системи зазвичай обирають кривий брус, одержаний відкиданням горизонтальної опорної в'язі (рис. 1.12,б). у такому разі

зайвим невідомим буде горизонтальна реакція, тобто розпір X_1 .

Канонічне рівняння має звичайний вид для системи з одним зайвим невідомим:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1f} = 0.$$

Враховуючи те, що навантаження вертикальне, зусилля в основній системі від заданого навантаження визначаються через балочні зусилля. Отже маємо:

$$M_f = M_0; \quad Q_f = Q_0 \cos \varphi;$$

$$N_f = -Q_0 \sin \varphi.$$

Ці згинаючі моменти визначаємо за ділянками еквівалентної балки (рис. 1.13,а): Балочні реакції з умов рівноваги будуть такі:

$$V_B = \frac{q \cdot 16 \cdot 8}{20} = \frac{5 \cdot 128}{20} = 32 \text{ kH}; \quad V_A = \frac{q \cdot 16 \cdot 12}{20} = \frac{5 \cdot 192}{20} = 48 \text{ kH}.$$

Згинаючі моменти на ділянках балки:

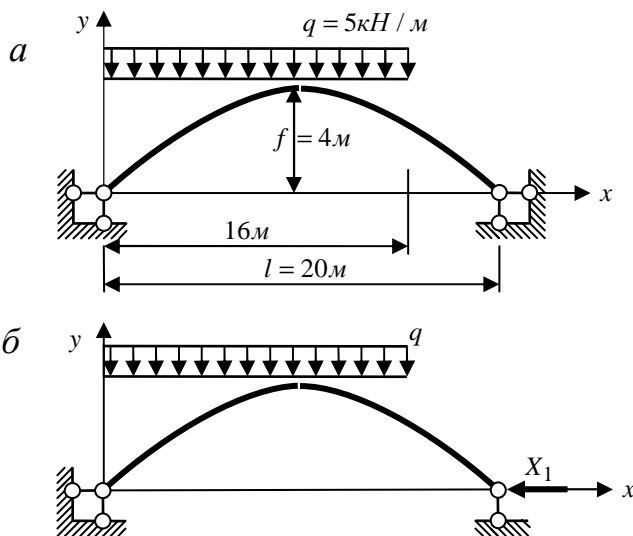


Рис. 1.12

$$M_0(x_1) = V_A x_1 - \frac{q x_1^2}{2} = 48x_1 - 2,5x_1^2;$$

$$M_0(x_2) = V_A x_2 - q \cdot 16 \cdot (x_2 - 8) = 48x_2 - 80(x_2 - 8).$$

Поперечні сили такі:

$$Q_0(x_1) = V_A - q x_1 = 48 - 5x_1; \quad Q_0(x_2) = V_A - q \cdot 16 = 48 - 5 \cdot 16 = -32 \text{ кН}.$$

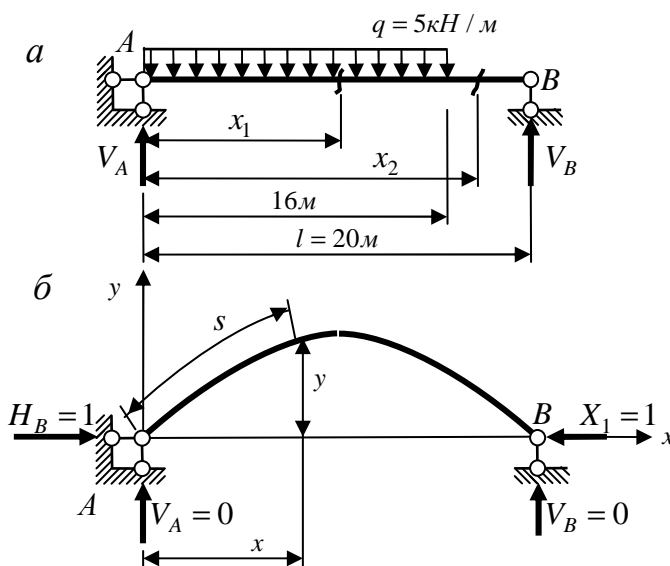


Рис. 1.13

Згинаючі моменти від дії
одиничного невідомого $X_1 = 1$
визначаються за рис. 1.13,б :

$$\begin{aligned} \bar{M}_1 &= -X_1 \cdot y = \\ &= -y. = -\frac{4f}{l^2} x(l-x) = \\ &= -0,04x(20-x) \end{aligned}$$

Поперечні та поздовжні сили
такі: $\bar{Q}_1 = -\sin \varphi$, $\bar{N}_1 = -\cos \varphi$.

Оскільки арка полого та
гнучка, при визначенні
переміщень будемо враховувати
лише деформації згину.

Задана арка є однією з небагатьох, для якої інтеграли у виразах для
переміщень можна визначити аналітично. Дійсно, при $\frac{I_0}{I} = \cos \varphi$ та $ds = \frac{dx}{\cos \varphi}$

маємо:

$$\begin{aligned} EI_0 \delta_{11} &= \int_s \bar{M}_1^2 \frac{I_0}{I} ds = \int_0^l (-y)^2 \cos \varphi \cdot \frac{dx}{\cos \varphi} = \int_0^l \left[\frac{4f}{l^2} x(l-x) \right]^2 dx = \\ &= \frac{16f^2}{l^4} \left(l^2 \frac{x^3}{3} - 2l \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \right)_0^l = \frac{8}{15} f^2 l = \frac{8}{15} \cdot 4^2 \cdot 20 = 170,7. \end{aligned}$$

Аналогічно одержимо вантажне переміщення:

$$\begin{aligned} EI_0 \Delta_{1f} &= \int_l M_0(-y) dx = \int_0^{16} (48x_1 - 2,5x_1^2) \cdot \left[-\frac{4f}{l^2} x_1(l-x_1) \right] dx_1 + \\ &+ \int_{16}^{20} [48x_2 - 80(x_2 - 8)] \cdot \left[-\frac{4f}{l^2} x_2(l-x_2) \right] dx_2. \end{aligned}$$

Після підстановки стріли підйому та прольоту виконуємо інтегрування.
У результаті одержуємо: $EI_0 \Delta_{1f} = -9639$.

Розв'язання канонічного рівняння дає такий результат:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1f}}{\delta_{11}} = -\frac{EI_0 \Delta_{1f}}{EI_0 \delta_{11}} = -\frac{-9639}{170,7} = 56,47 \text{ kH}.$$

Остаточні згинаючі моменти для цієї арки можна одержати в аналітичному виді:

$$M(x_1) = M_0(x_1) + X_1 \cdot \bar{M}_1 = 48x_1 - 2,5x_1^2 - 56,47 \cdot 0,04x_1(20 - x_1);$$

$$M(x_2) = M_0(x_2) + X_1 \cdot \bar{M}_1 = 48x_2 - 80 \cdot (x_2 - 8) - 56,47 \cdot 0,04x_2(20 - x_2).$$

Для поперечних та поздовжніх сил маємо стандартні співвідношення, що відповідають вертикальному навантаженню:

$$Q(x_1) = Q_0(x_1) \cdot \cos \varphi + X_1 \bar{Q}_1 = (48 - 5x_1) \cos \varphi - 56,47 \sin \varphi;$$

$$Q(x_2) = Q_0(x_2) \cos \varphi + X_1 \bar{N}_1 = -32 \cos \varphi - 56,47 \sin \varphi;$$

$$N(x_1) = -Q_0(x_1) \sin \varphi + X_1 \bar{N}_1 = -(48 - 5x_1) \sin \varphi - 56,47 \cos \varphi;$$

$$N(x_2) = -Q_0(x_2) \sin \varphi + X_1 \bar{N}_1 = 32 \sin \varphi - 56,47 \cos \varphi.$$

Таблиця 1.2

№ т.	x	tgφ	sinφ	cosφ	M	Q	N
A	0	0,8	0,625	0,781	0	2,19	-74,1
1	2	0,64	0,539	0,842	4,8	1,56	-68,0
2	4	0,48	0,433	0,902	7,66	0,80	-63,1
3	6	0,32	0,305	0,952	8,6	-0,09	-59,2
4	8	0,16	0,158	0,987	7,62	-1,03	-57,0
5	10	0	0	1	4,7	-2,0	-56,5
6	12	-0,16	-0,158	0,987	-0,14	-2,92	-57,6
7	14	-0,32	-0,305	0,952	-6,92	-3,72	-60,5
8	16	-0,48	-0,433	0,902	-15,62	-4,41	-64,8
9	18	-0,64	-0,539	0,842	-17,32	3,49	-64,8
B	20	-0,8	-0,625	0,781	0	10,30	-64,1

Поділивши прольот арки на ділянки довжиною, наприклад 2 м, визначимо зусилля у цих перерізах в табл. 1.2.

Для обчислення тригонометричних характеристик кута φ нахилу дотичних до осі арки скористаємося відомим співвідношенням:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{4f}{l^2} (l - 2x) = 0,04(20 - 2x)$$

і далі, використовуючи відомі співвідношення або через обернені тригонометричні функції, знаходимо значення $\sin \varphi$ та $\cos \varphi$.

За результатами обчислень у таблиці 1.2 на рис. 1.14 побудовані епюри внутрішніх зусиль.

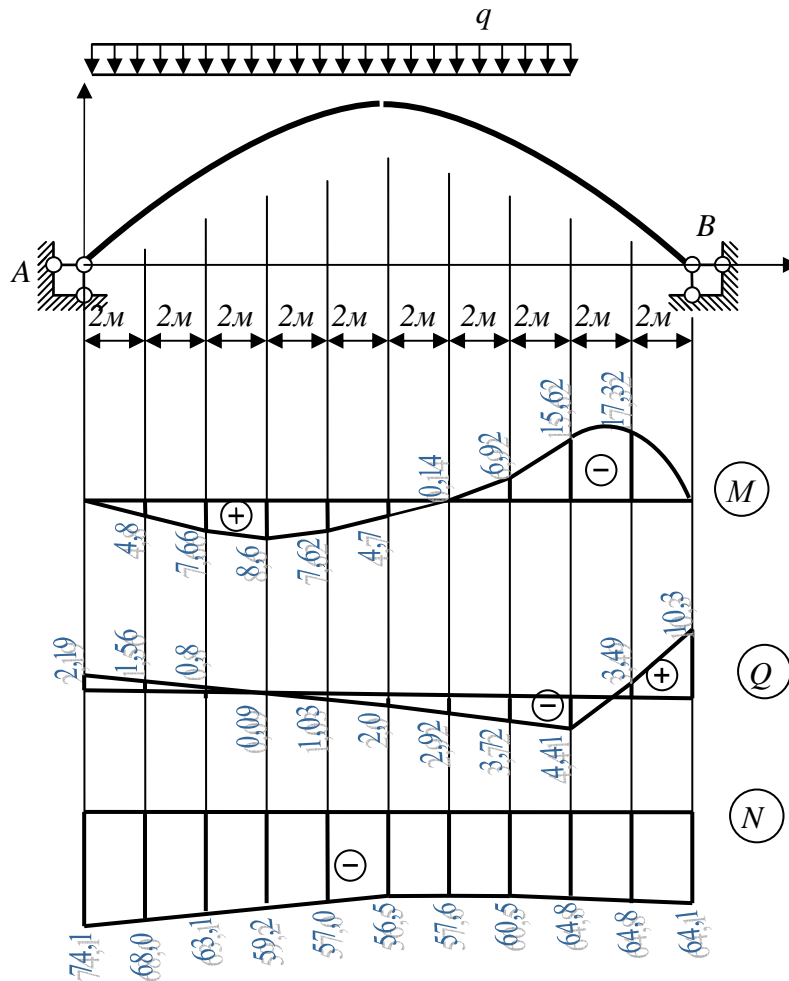


Рис. 1.14

1.9 Побудувати епюри внутрішніх зусиль у циркульній арці постійного перерізу від заданого навантаження (рис. 1.15,а). Вважати арку пологою та гнучкою. *Розв'язання.* Ступінь статичної невизначуваності, канонічне рівняння, основна система та одиничні зусилля в основній системі будуть такими самими, як і для попередньої арки (вправа 1.8).

Враховуючи, що арка полого та гнучка, прийmemo $ds \approx dx$ та переміщення будемо обчислювати без урахування поперечних та поздовжніх деформацій. При цьому інтеграли в формулі Мора для переміщень будемо обчислювати за наближеною формулою прямокутників. Отже, одержимо такі вирази:

$$EI\delta_{11} = \sum y^2 \Delta x; \quad EI\Delta_{1f} = -\sum M_0 y \Delta x.$$

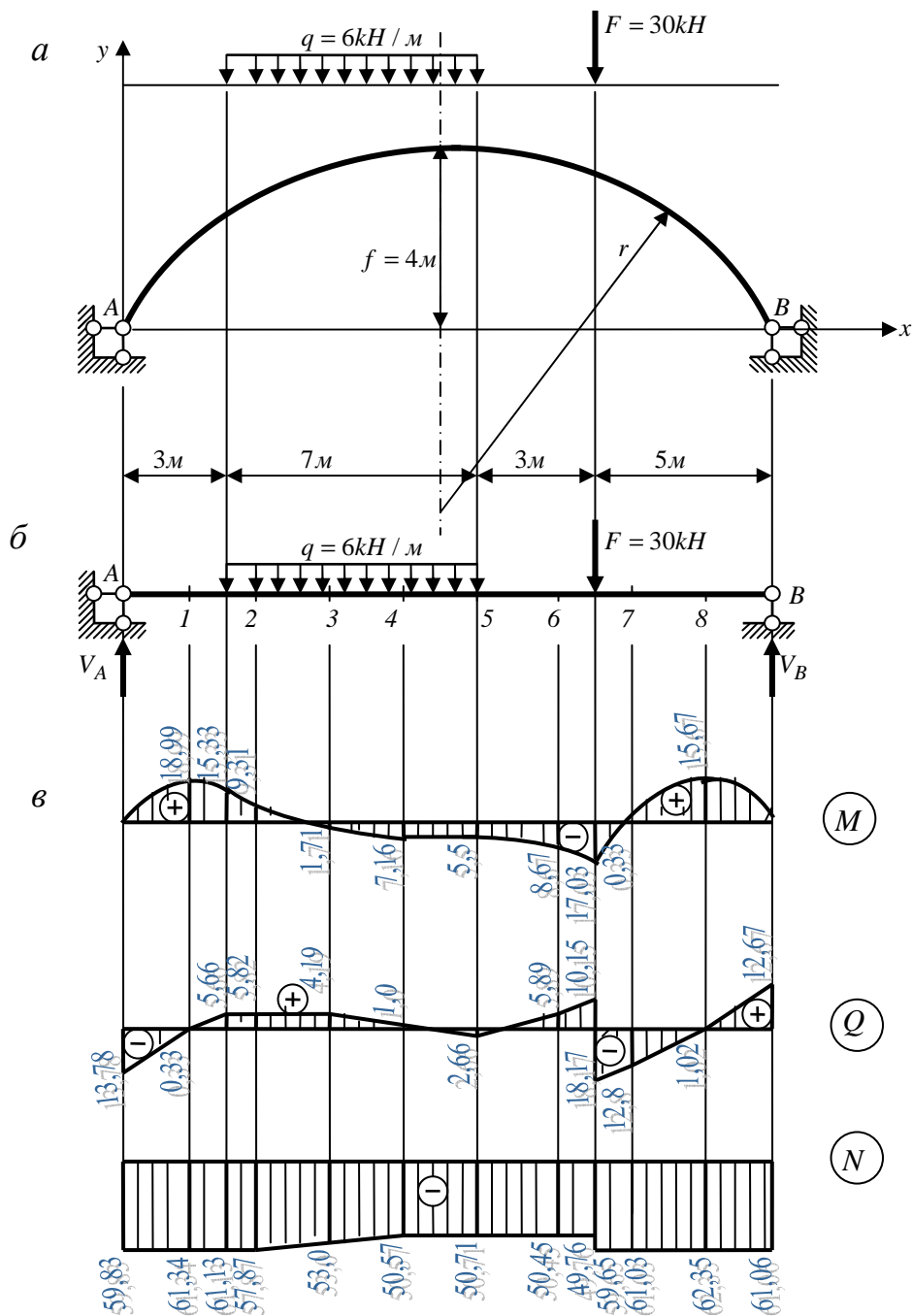


Рис. 1.15

Для обчислень цих величин розбиваємо прольот арки на рівні ділянки довжиною 2 м.

Розраховуючи еквівалентну балку (рис. 1.15,б) одержимо реакції опор:

$$\sum M_A = 0; \quad V_B = \frac{q \cdot 7 \cdot 6,5 + F \cdot 13}{18} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 6,5 + 30 \cdot 13}{18} = 36,83 \text{ rH};$$

$$\sum M_B = 0; \quad V_A = \frac{q \cdot 7 \cdot 11,5 + F \cdot 5}{18} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 11,5 + 30 \cdot 5}{18} = 35,17 \text{ rH}.$$

Перевірка реакцій дає:

$$\sum y = V_A + V_B - q \cdot 7 - F = 35,17 + 36,83 - 6 \cdot 7 - 30 = 72 - 72 = 0,$$

Отже реакції обчислені вірно.

Розрахунок арки виконуємо у табл. 1.3. Зокрема у стовпчиках 6, 7 наведені балочні згинаючий момент та поперечна сила у точках на межах ділянок арки.

Для визначення геометричних характеристик осі арки попередньо знайдемо радіус дуги, за якою окреслена ця вісь:

$$r = \frac{f}{2} + \frac{l^2}{8f} = \frac{4}{2} + \frac{18^2}{8 \cdot 4} = 12,125 \text{ м.}$$

Значення $\sin \varphi$, $\cos \varphi$, y для точок на межах ділянок арки обчислені за виразами:

$$\sin \varphi = \frac{l/2 - x}{r}; \quad \cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}; \quad y = r \cdot \cos \varphi - (r - f)$$

і наведені у стовпчиках 3, 4, 5 табл. 1.3.

Використовуючи підсумки у стовпчиках 8, 9 табл. 1.3 одержимо:

$$\frac{EI}{\Delta x} \delta_{11} = \sum y^2 = 80,96; \quad \frac{EI}{\Delta x} = -\sum y M_0 = -4074,03.$$

З канонічного рівняння одержимо значення розпору арки:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1f}}{\delta_{11}} = \frac{\sum y M_0}{\sum y^2} = \frac{4074,03}{80,96} = 50,32 \text{ кН.}$$

Далі у стовпчиках 10, 11, 12 табл. 1.3 обчислені остаточні значення згинаючих моментів, поперечних та поздовжніх сил за виразами:

$$M = M_0 - X_1 y; \quad Q = Q_0 \cos \varphi - y \sin \varphi; \quad N = -Q_0 \sin \varphi - y \cos \varphi.$$

У стовпчику 13 табл. 1.3 виконано кінематичну перевірку розрахунку:

$$\frac{EI}{\Delta x} \sum y M = -0,04 \approx 0. \text{ Отже згинаючі моменти обчислені вірно.}$$

За даними у стовпчиках 10, 11, 12 на рис. 1.15, в побудовані епюри внутрішніх сил арки. Для більш коректного виду епюр у стовпчиках 10, 11, 12 після підсумовувань обчислені значення внутрішніх зусиль у перерізах на межах ділянок навантаження, тобто на початку розподіленого навантаження та під зосередженою силою.

Таблиця 1.3

№ т.,т.	x	sin φ	cos φ	y	Mo	Qo	y*y	y*Mo	M	Q	N	y*M
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
A	0,00	0,742	0,670	0,00	0,00	35,17	0,00	0,00	0,00	-13,78	-59,83	0,00
1,00	2,00	0,577	0,817	1,78	70,34	35,17	3,15	124,87	-18,99	-0,33	-61,39	-33,72
2,00	4,00	0,412	0,911	2,92	137,68	29,17	8,53	402,17	-9,31	5,82	-57,87	-27,19
3,00	6,00	0,247	0,969	3,62	184,02	17,17	13,13	666,71	1,71	4,19	-53,00	6,20
4,00	8,00	0,082	0,997	3,96	206,36	5,17	15,67	816,92	7,16	1,00	-50,57	28,34
5,00	10,00	-0,082	0,997	3,96	204,70	-6,83	15,67	810,34	5,50	-2,66	-50,71	21,77
6,00	12,00	-0,247	0,969	3,62	190,98	-6,83	13,13	691,92	8,67	5,83	-50,45	31,41
7,00	14,00	-0,412	0,911	2,92	147,32	-36,83	8,53	430,33	0,33	-12,80	-61,03	0,97
8,00	16,00	-0,577	0,817	1,78	73,66	-36,83	3,15	130,77	-15,67	-1,02	-62,35	-27,82
B	18,00	-0,742	0,670	0,00	0,00	-36,83	0,00	0,00	0,00	12,67	-61,06	0,00
Σ							80,96	4074,03				-0,04
q поч.	3,00	0,495	0,869	2,41	105,51	35,17			-15,83	5,66	-61,13	
F лів	13,00	-0,330	0,944	3,32	184,15	-6,83			17,03	10,15	-49,76	
F прав	13,00	-0,330	0,944	3,32	184,15	-36,83			17,03	-18,17	-59,65	

1.4 Розрахунок комбінованих систем

Розрахунок комбінованих систем зручно виконати методом сил. Покажемо принцип розрахунку на прикладі шпренгельної балки.

Вправа

1.10 Виконати розрахунок шпренгельної балки (рис. 1.16 а). Прийняти співвідношення жорсткостей стержнів шпренгеля та балки таким: $\frac{EA}{EI} = 10$.

Розв'язання. Ступінь статичної невизначуваності визначимо за формулою $n = 3K - III + C_0 - 3 = 3 \cdot 3 - 8 + 3 - 3 = 1$. Отже система має одну зайву в'язь.

В основній системі розріжемо горизонтальний стержень шпренгеля (рис. 1,16,б).

Канонічне рівняння: $\delta_{11}X_1 + \Delta_{1f} = 0$.

Виконуємо розрахунок основної системи на задане навантаження (рис. 1.16,в). Оскільки при цьому вузли шпренгеля не мають навантаження, зусилля в стержнях шпренгеля відсутні: $N_{1f} = N_{2f} = N_{3f} = N_{4f} = N_{5f} = 0$. Поздовжня сила балки також нульова: $N_{6f} = 0$. Епюра M_f згинаючих моментів у межах балки побудована на рис 1.16,г.

Для розрахунку основної системи на дію одиничного зайвого невідомого (рис. 1.16,д) спочатку з рівноваги вузла шпренгеля визначимо зусилля в його стержнях:

$$\sum x = 0; \Rightarrow \bar{N}_{21} = \frac{\bar{N}_{11}}{\cos \alpha} = \frac{1}{0,894} = 1,119;$$

$$\sum y = 0; \Rightarrow \bar{N}_{31} = -\bar{N}_{21} \sin \alpha = -1,119 \cdot 0,447 = -0,5,$$

$$\text{де: } \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = 0,447; \quad \cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = 0,894.$$

Зусилля в інших стержнях шпренгеля визначаються з його симетрії, а поздовжня сила у балці очевидно $\bar{N}_{61} = -1$.

Для визначення згинаючих моментів у балці відріжемо її від шпренгеля і завантажимо балку зусиллями у розрізаних стержнях (рис. 1.16,е). Відповідна епюра наведена на рис. 1.16,ж.

При обчисленні одиничних та вантажних переміщень враховуємо, що в межах шпренгеля мають місце лише деформації розтягу-стиску.

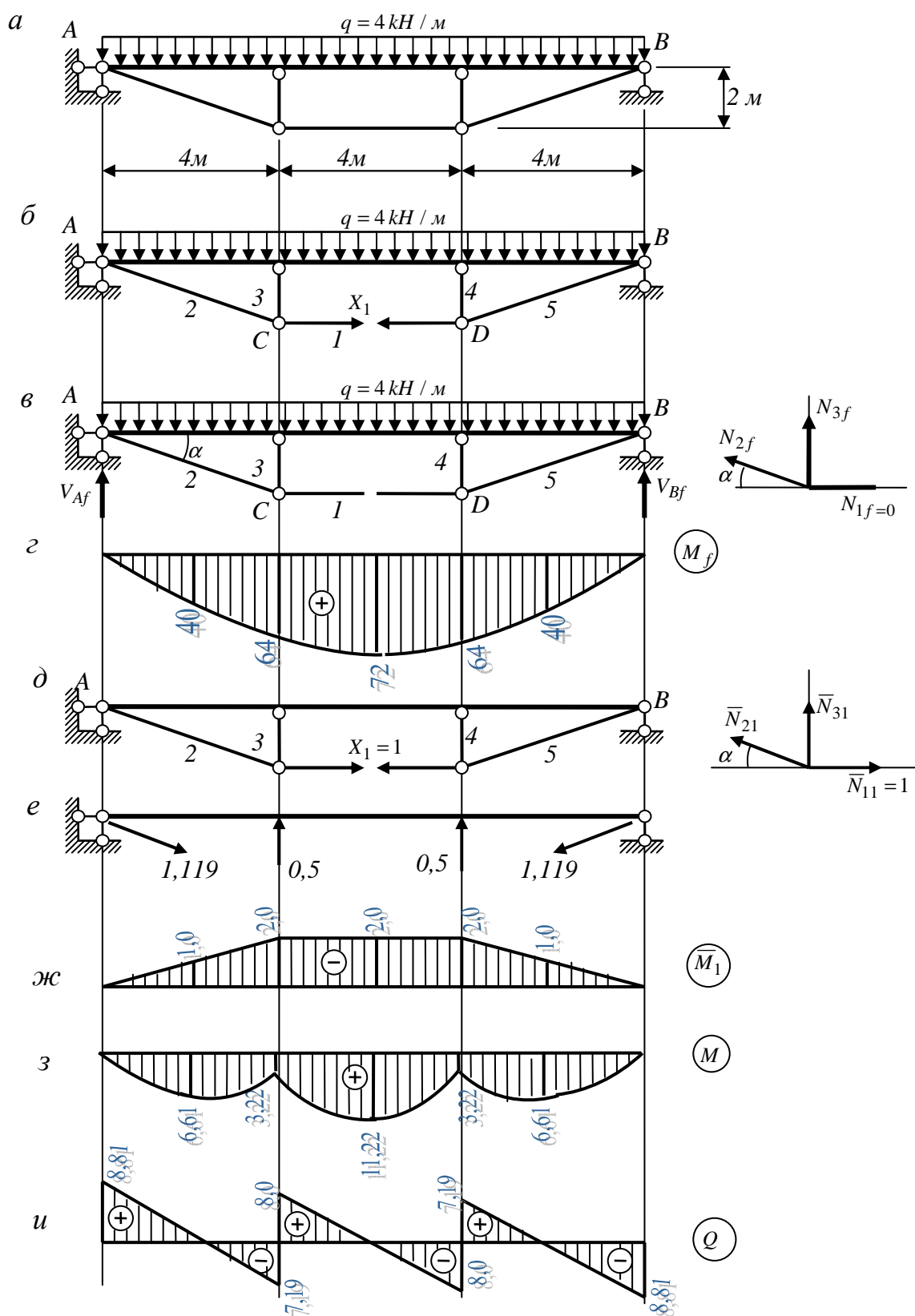


Рис. 1.16

Отже маємо:

$$\begin{aligned}\Delta_{1f} &= \sum \frac{1}{EI} \int M_f \bar{M}_1 dx = \frac{2}{EI} \frac{4}{6} (0 \cdot 0 - 4 \cdot 40 \cdot 1 - 64 \cdot 2) + \\ &+ \frac{1}{EI} \frac{4}{6} (-64 \cdot 2 - 4 \cdot 72 \cdot 2 - 64 \cdot 2) = -\frac{938,67}{EI}; \\ \delta_{11} &= \sum \frac{1}{EI} \int \bar{M}_1 \bar{M}_1 dx + \sum \frac{\bar{N}_1 \bar{N}_1 l}{EA} = \frac{1}{EI} \frac{2 \cdot 4}{2} \frac{2}{3} 2 \times 2 + \frac{1}{EI} 2 \cdot 4 \cdot 2 + \frac{1 \cdot 1 \cdot 4}{EA} + \\ &+ \frac{1,119 \cdot 1,119 \cdot 4,47}{EA} \times 2 + \frac{0,5 \cdot 0,5 \cdot 2}{EA} \times 2 + \frac{1 \cdot 1 \cdot 12}{EA} = \frac{30,39}{EI}.\end{aligned}$$

З канонічного рівняння одержуємо значення зайвого невідомого:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1f}}{\delta_{11}} = \frac{938,67}{30,39} = 30,89 \text{ кН}.$$

Зусилля в стержнях шпренгеля обчислюємо використовуючи принцип незалежності дії сил: $N = N_f + \bar{N}_1 X_1$. У результаті одержимо:

$$\begin{aligned}N_1 &= X_1 = 30,39 \text{ кН}; N_2 = 1,119 \cdot 30,39 = 34,56 \text{ кН} = N_5; \\ N_3 &= -0,5 \cdot 30,39 = -15,19 \text{ кН} = N_4; N_6 = -X_1 = -30,39 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Аналогічно обчислюємо згинаючі моменти у балці:

$$M = M_f + \bar{M}_1 X_1.$$

Остаточна епюра згинаючих моментів наведена на рис. 1.16,з.

Поперечні сили визначаємо через згинаючі моменти:

на лівій ділянці маємо:

$$Q_{\text{лів}}^{\text{прав}} = \frac{3,22 - 0}{4} \pm \frac{4 \cdot 4}{2} = 0,81 \pm 8 = \begin{bmatrix} 8,81 \text{ кН} \\ -7,19 \text{ кН} \end{bmatrix};$$

на правій ділянці значення поперечної сили визначаються умовами симетрії;

на середній ділянці одержимо:

$$Q_{\text{лів}}^{\text{прав}} = \frac{3,22 - 3,22}{4} \pm \frac{4 \cdot 4}{2} = 0 \pm 8 = \begin{bmatrix} 8 \text{ кН} \\ -8 \text{ кН} \end{bmatrix}.$$

За цими результатами на рис. 1.16,и побудована епюра поперечних сил.

1.5 Метод переміщень

Теоретичний матеріал та запитання для самоперевірки наведені у гл. 5 [2] та гл. 5 [5].

Вправи

1.11 Побудувати епюри внутрішніх зусиль в рамі, наведеній на рис. 1.17,а. Прийняти співвідношення жорсткостей ригеля та стояків

$$\frac{EI_p}{EI_{cm}} = 3:1.$$

Розв'язання. Ступінь кінематичної невизначуваності знаходимо за виразом: $n = n_y + n_{\lambda}$. Кількість кутових переміщень (поворотів) вузлів рами визначається кількістю жорстких вузлів. Тобто для заданої рами вона становить $n_y = 2$. Для визначення кількості лінійних переміщень вузлів утворюємо шарнірно-стержневу схему рами поставивши в усі її вузли шарніри (рис. 1.17,б). У цій схемі виявляється можливість горизонтальних зміщень вузлів ригеля (можливі переміщення показані штриховими лініями). Щоб запобігти цим зміщенням, достатньо поставити опорний стержень у будь-який вузол ригеля. Тобто кількість лінійних переміщень становить $n_{\lambda} = 1$. Отже ступінь кінематичної невизначуваності рами буде $n = 2 + 1 = 3$. Нагадаємо, що при визначенні ступеня кінематичної невизначуваності статично визначувані частини рами (у нашому випадку консоль) відкидаються.

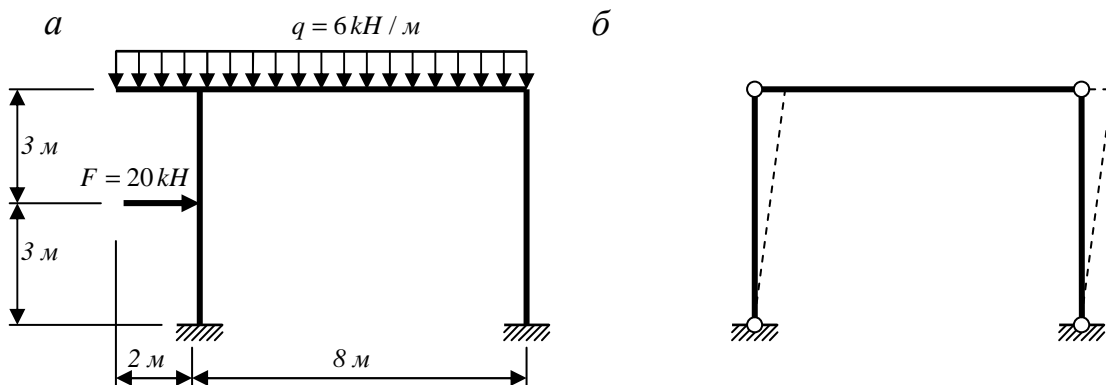


Рис 1.17

Обираючи основну систему ставимо опорні в'язі у напрямку можливих переміщень вузлів. У нашому випадку це будуть два плаваючі затиснення у жорстких вузлах рами і горизонтальний опорний стержень у вузлі ригеля (рис. 1.18,а).

Канонічні рівняння задачі мають такий вид:

$$r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{13}Z_3 + R_{1f} = 0;$$

$$r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}Z_3 + R_{2f} = 0;$$

$$r_{31}Z_1 + r_{32}Z_2 + r_{33}Z_3 + R_{3f} = 0.$$

Епюри згинаючих моментів в основній системі будують за допомогою таблиць розрахунку балок постійного перерізу (табл. 1.4 [2], табл. 1 [5] та ін.).

Зауважимо, що згинаючі моменти на епюрі M_f (рис. 1.18,б) у межах консолі визначаються методом перерізів, оскільки ця частина рами статично визначувана.

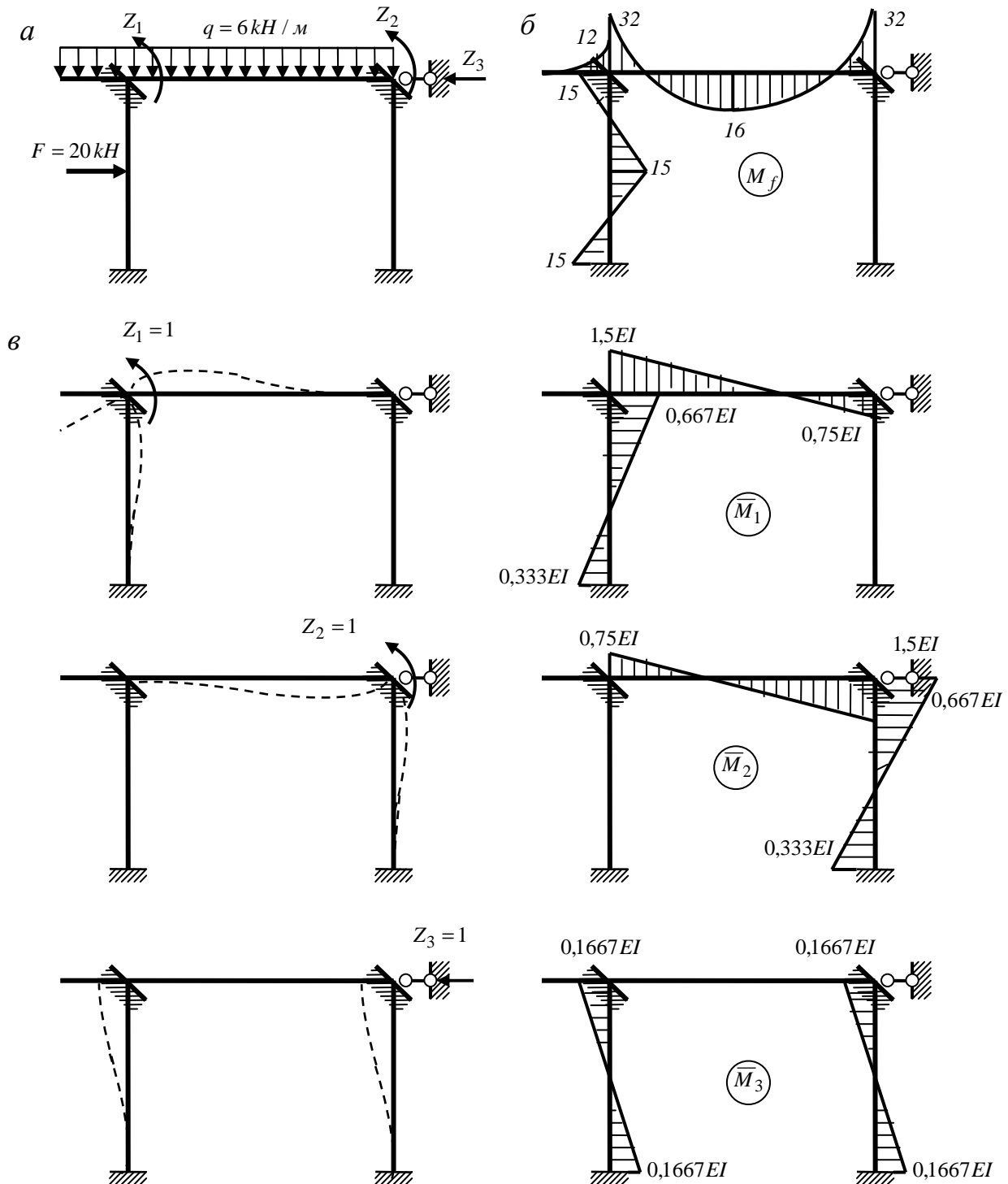


Рис. 1.18

Перед побудуванням кожної з одиничних епюр згинаючих моментів бажано одержати деформовану схему рами при відповідному зміщенні додаткової в'язі основної системи. Ці схеми наведені ліворуч від кожної одиничної епюри на рис. 1.18,в.

Для визначення коефіцієнтів та вільних членів канонічних рівнянь використовуємо умови рівноваги частин рами. Зокрема, реакції, що входять до першого канонічного рівняння (реактивні моменти у плаваючому затисненні), обчислюються з рівнянь рівноваги лівого вузла ригеля (рис. 1.19,а) під дією згинаючих моментів на кінцях стержнів. У підсумку з рівнянь сум моментів одержуємо:

$$r_{11} = 1,5EI + 0,667EI = 2,167EI; r_{12} = 0,75EI;$$

$$r_{13} = -0,1667EI; R_{1f} = 32 - 12 - 15 = 5 \text{ кН}.$$

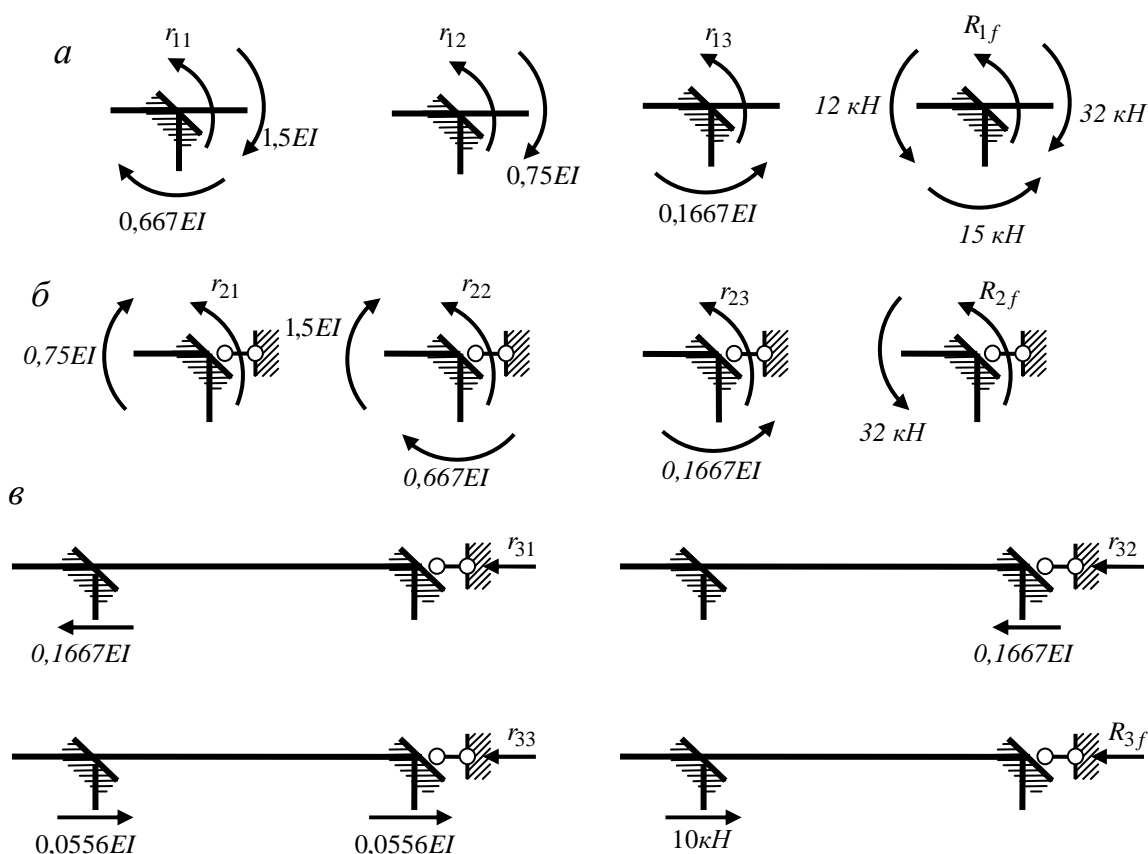


Рис.1.19

Реакції, що входять до другого канонічного рівняння (реактивні моменти у плаваючому затисненні), визначаються з рівнянь рівноваги правого вузла ригеля (рис. 1.19,б). Одержимо такі значення:

$$r_{21} = 0,75EI; r_{22} = 1,5EI + 0,667EI = 2,167EI;$$

$$r_{23} = -0,1667EI; R_{1f} = -32 \text{ кН}.$$

Взаємність реакцій виконується: $r_{12} = r_{21}$.

Коефіцієнти третього канонічного рівняння (реакції у доданий горизонтальній в'язі) знаходяться з рівнянь рівноваги ригеля (рис. 1.19, в) під дією поперечних сил у розрізаних стояках. Нагадаємо, що поперечні сили можна знайти через згинаючі моменти або через величини опорних реакцій у таблицях (табл. 1.4 [2], табл. 1 [5] та ін.). З рівнянь нулю сум проекцій сил на горизонтальну вісь одержимо:

$$r_{31} = -0,1667EI; r_{32} = -0,1667EI;$$

$$r_{33} = 0,0556EU + 0,0556EI = 0,1112EI; R_{3f} = 10kH.$$

Як бачимо, теорема про взаємність реакцій і далі виконується: $r_{32} = r_{23}$.

Після підстановки реакцій у канонічні рівняння останні набувають такого виду:

$$2,167EIZ_1 + 0,75EIZ_2 - 9,1667EIZ_3 + 5 = 0;$$

$$0,75EIZ_1 + 2,167EIZ_2 - 0,1667EIZ_3 - 32 = 0;$$

$$-0,1667EIZ_1 - 0,1667EIZ_2 + 0,1112EIZ_3 + 10 = 0.$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь одержуємо переміщення вузлів:

$$Z_1 = -13,67 / EI; Z_2 = 12,44 / EI; Z_3 = -91,78 / EI.$$

Побудування остаточної епюри згинаючих моментів здійснюється з використанням принципу суперпозиції:

$$M = M_f + \bar{M}_1 Z_1 + \bar{M}_2 Z_2 + \bar{M}_3 Z_3.$$

Виправлені епюри $\bar{M}_1 Z_1, \bar{M}_2 Z_2, \bar{M}_3 Z_3$ та остаточно епюра моментів наведені на рис. 1.20.

Визначення поперечних та поздовжніх сил визначаються так само, як і в методі сил. Відповідні епюри наведені на рис. 1.21.

Для перевірки розрахунку необхідно розглянути рівновагу частин рами. Бажано розглянути ті частини, які розглядалися при обчисленні коефіцієнтів канонічних рівнянь (рис. 1.22).

Неважко упевнитися в тому, що для кожного з вузлів на рис. 1.22 виконуються умови $\sum M = 0$, а для ригеля - $\sum x = 0$. Отже, розрахунок виконано правильно.

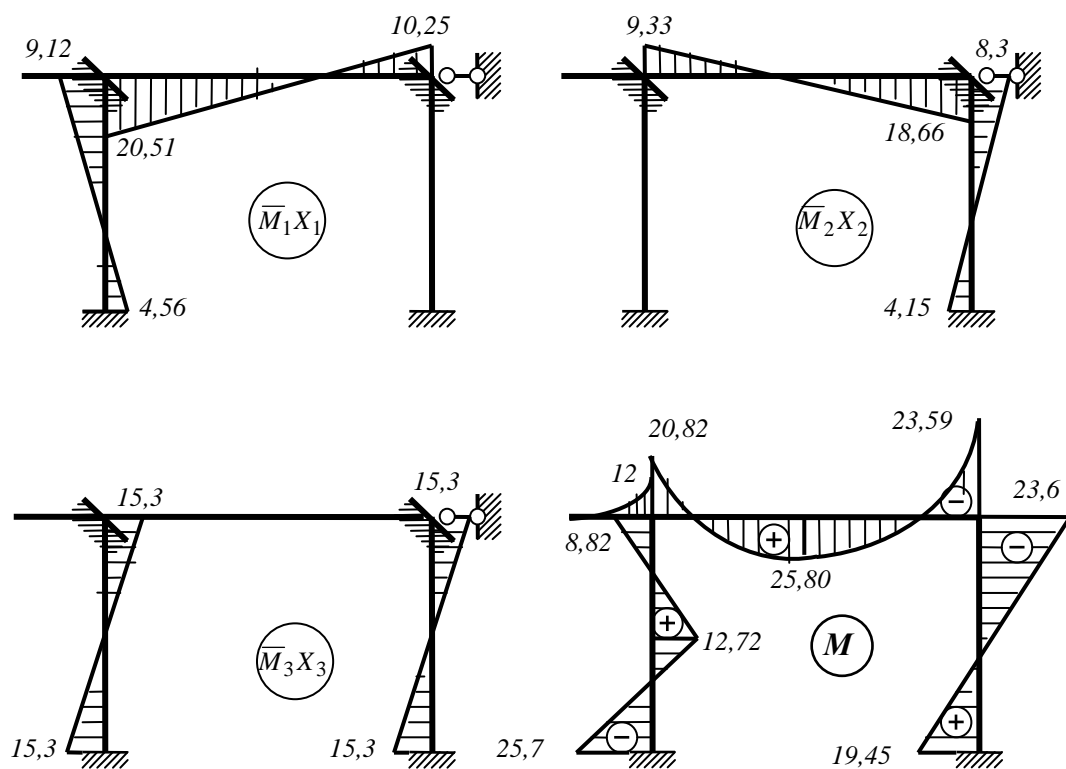


Рис. 1.20

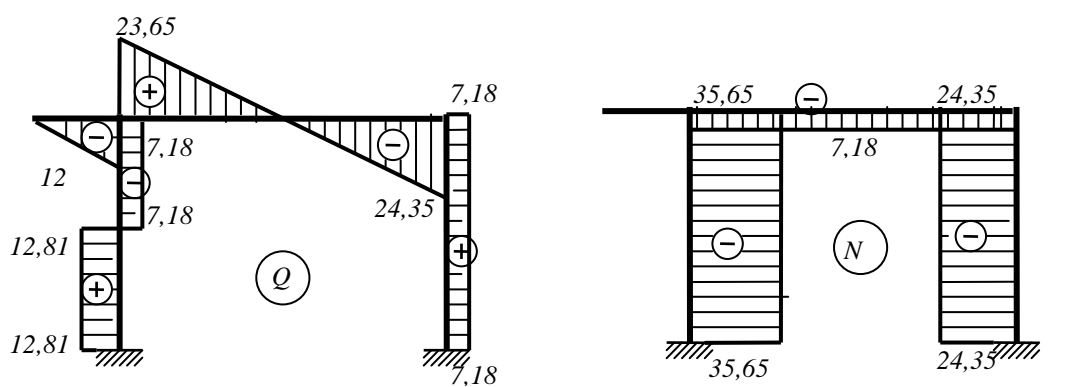


Рис. 1.21

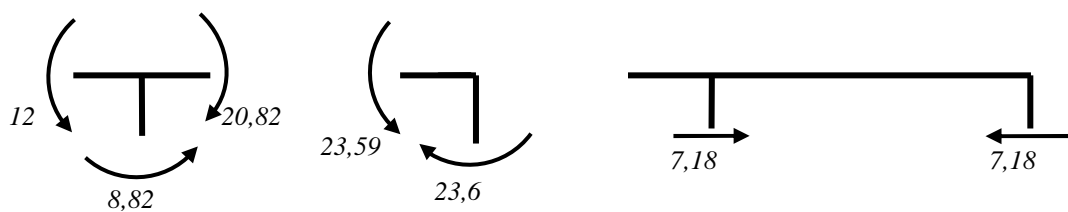


Рис.1.22

1.12 Побудувати епюри внутрішніх зусиль у рамі, наведений на рис. 1.23,а. Жорсткість стержнів прийняти постійною.

Розв'язання. Рама має два жорстких вузла, отже $n_y = 2$. Неважко побачити, що ригель може зміщуватися вдовж горизонталі і це зміщення усувається постановкою горизонтальної в'язі у одному з вузлів ригеля, тобто $n_{\text{л}} = 1$. Отже рама має ступінь кінематичної невизначуваності $n = 2 + 1 = 3$.

Основна система наведена на рис. 1.23,б. Зауважимо, що зосереджена сила без порушення розподілу згинаючих моментів може бути перенесена в будь-яку точку ригеля, зокрема в середину його довжини. Таке навантаження є кососиметричним. Враховуючи це, повороти вузлів будуть однаковими і можна прийняти їх одним груповим невідомим переміщенням Z_1 .

Отже маємо два невідомих і, відповідно два канонічних рівняння:

$$r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1f} = 0;$$

$$r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2g} = 0.$$

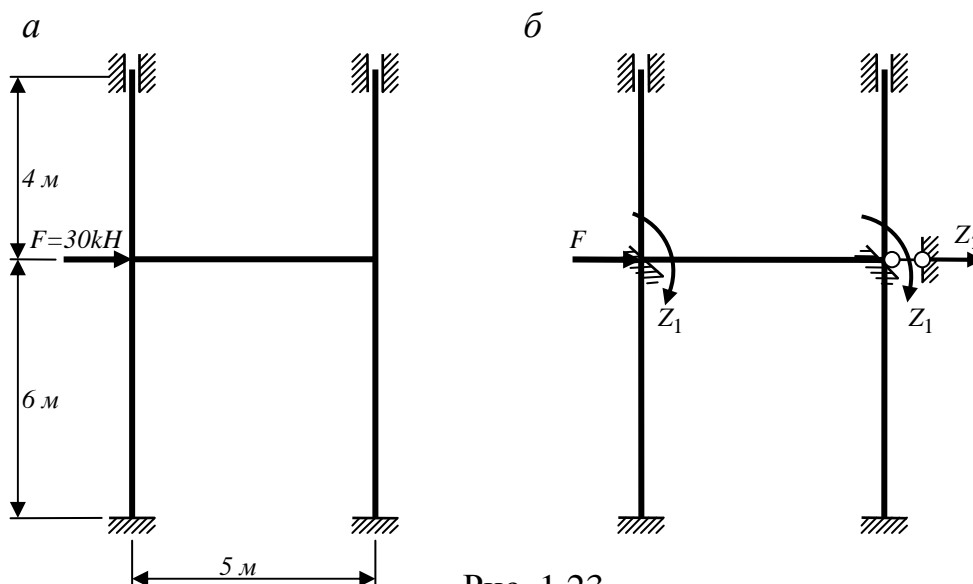


Рис. 1.23

Зазначимо, що епюра згинаючих моментів від заданого навантаження відсутня ($M_f = 0$) оскільки зосереджена сила діє у вузлі, який в основній системі не має лінійних зміщень.

При побудові епюри \bar{M}_1 необхідно повернути обидва плаваючі затиснення. Деформована схема та відповідна епюра наведені на рис. 1.24. При цьому епюра в межах ригеля одержана накладанням епюр від поворотів його лівого та правого кінців.

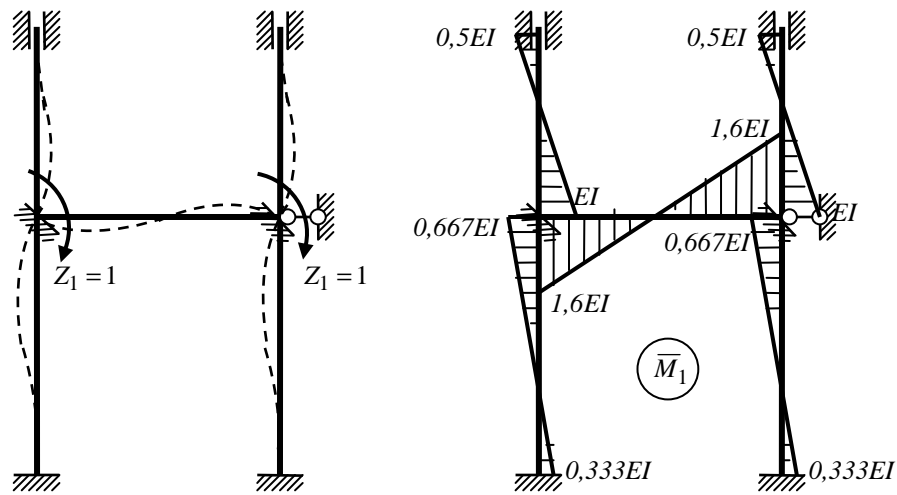


Рис. 1.24

Деформована схема та епюра \bar{M}_2 наведені на рис. 1.25.

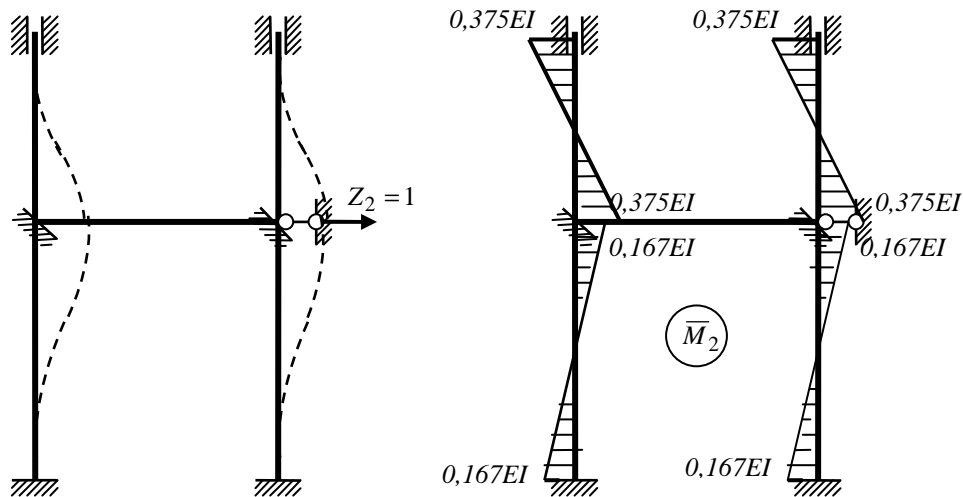


Рис. 1.25

При визначенні коефіцієнтів та вільних членів канонічних рівнянь необхідно мати на увазі, що перша в'язь основної системи є груповою, отже з рівноваги одного вузла визначається половина реакції. З рівноваги частин рами (рис. 1.26) одержуємо:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} r_{11} &= EI + 1,6EI + 0,667EI = 3,267EI; r_{11} = 6,534EI; \\ \frac{1}{2} r_{12} &= 0,375EI - 0,167EI = 0,208EI; r_{12} = 0,416EI; R_{1f} = 0; \\ r_{21} &= 9,375EI + 0,375EI - 0,167EI - 0,167EI = 0,416EI = r_{12}; \\ r_{22} &= 0,1875EI + 0,1875EI + 0,0556EI + 0,0556EI = 0,4862EI; \\ R_{2f} &= -F = -30kH. \end{aligned}$$

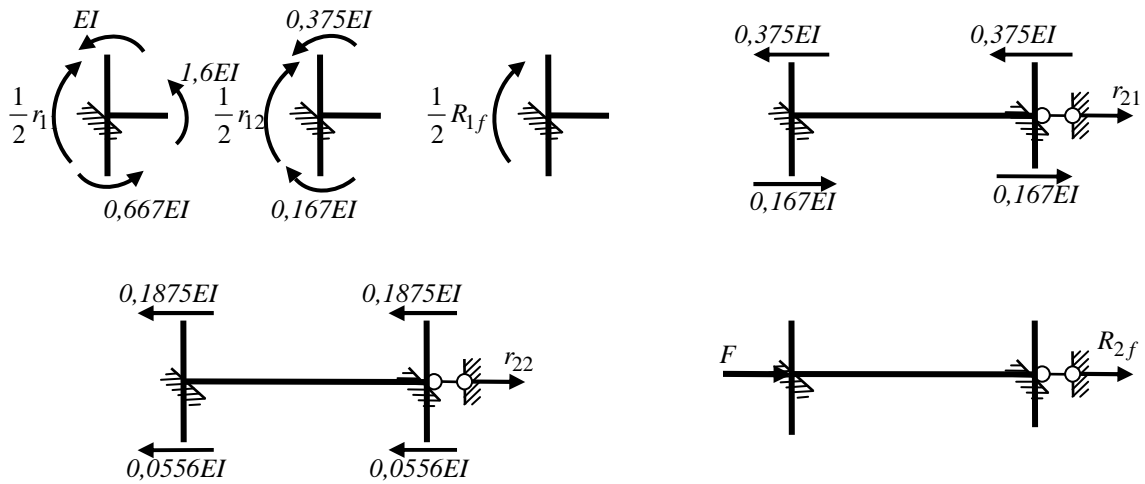


Рис. 1.26

Підстановка цих реакцій в канонічні рівняння та їх розв'язання дають таке:

$$\begin{aligned} 6,534EI Z_1 + 0,416EI Z_2 &= 0; \\ 0,416EI Z_1 + 0,4862EI Z_2 - 10 &= 0; \\ Z_1 &= -1,38 / EI; Z_2 = 21,75 / EI. \end{aligned}$$

Подальший розрахунок виконується як і для рами у попередній вправі. Цей розрахунок рекомендується виконати самостійно.

При визначенні поздовжніх сил слід починати обчислення з верхніх стояків. Методом перерізів легко одержати, що для цих стержнів $N = 0$.

1.13 Обрати раціональний метод розрахунку для рами, наведеної на рис. 1.27,а.

Розв'язання. Визначимо ступінь статичної невизначуваності рами:

$$n_{cm} = 3K - III + C_0 - 3 = 3 \cdot 2 - 4 + 6 - 3 = 5.$$

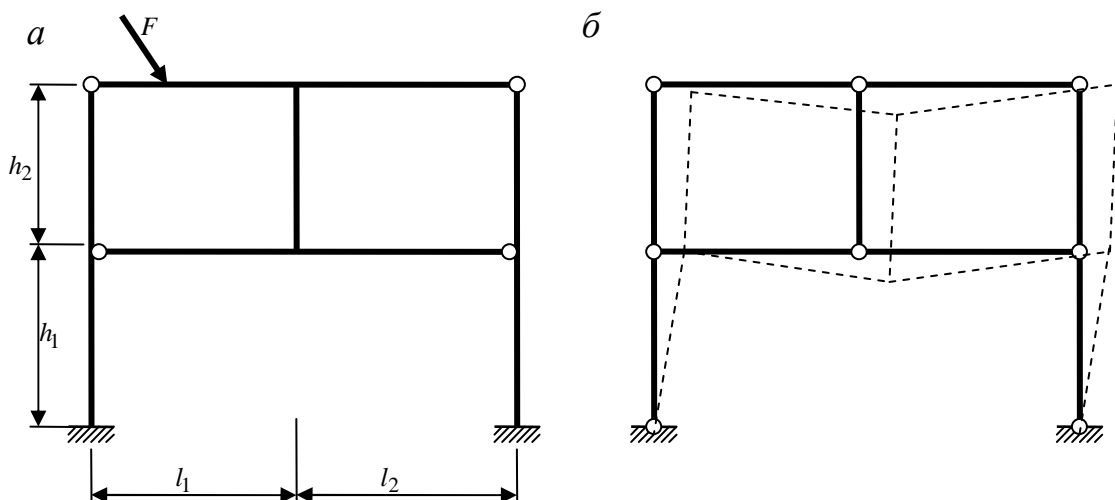


Рис. 1.27

Визначаємо ступінь кінематичної невизначуваності рами:

$$n_{кін} = n_y + n_l = 4 + 3 = 7,$$

де кількість лінійних зміщень визначена за допомогою шарнірно-стержневої схеми рами (рис. 1.27,б).

Оскільки $n_{ст} < n_{кін}$, для розрахунку раціонально застосувати метод сил.

1.14 Обрати раціональний метод розрахунку для рами, наведеної на рис. 1.28,а.

Розв'язання. Визначимо ступінь статичної невизначуваності рами:

$$n_{ст} = 3K - III + C_0 - 3 = 3 \cdot 0 - 0 + 9 - 3 = 6.$$

Основну систему метода сил (рис. 1.28,б) обираємо з урахуванням симетрії рами. Оскільки навантаження симетричне, залишаємо симетричні групові зайві невідомі. Отже, з урахуванням симетрії одержуємо систему з трьома невідомими.

Неважко визначити ступінь кінематичної невизначуваності:

$$n_{кін} = n_y + n_l = 3 + 1 = 4.$$

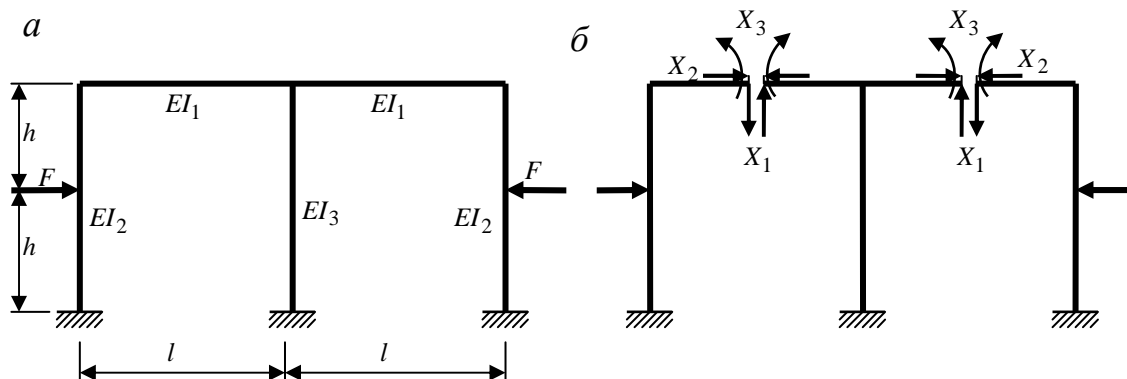


Рис. 1.28

Основну систему метода переміщень (рис. 1.29) обираємо з урахуванням

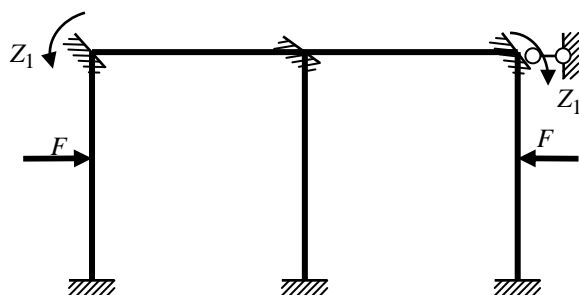


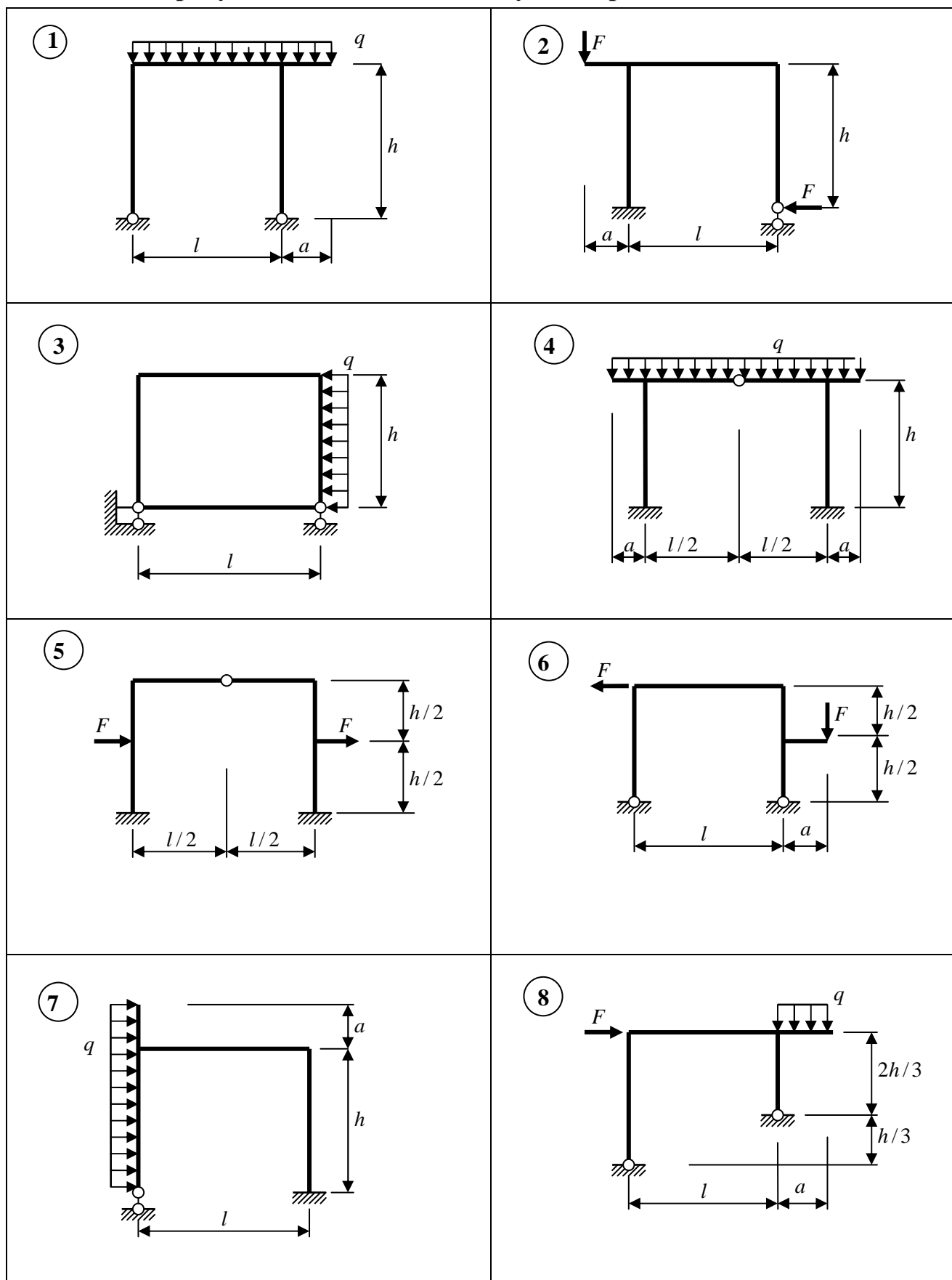
Рис. 1.29

симетрії деформацій. Дійсно, симетрична деформація передбачає відсутність поворотів на осі симетрії та відсутність зміщень перпендикулярних до осі симетрії. Отже, залишається лише одне ненульове групове переміщення крайніх вузлів ригеля.

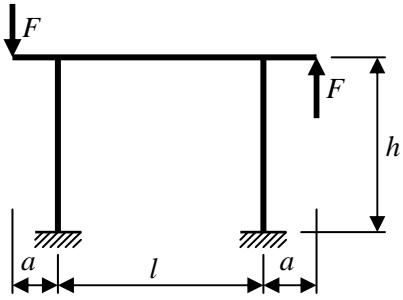
Враховуючи наведені міркування для розрахунку заданої рами раціонально застосувати метод переміщень.

Розділ 2 Матеріали для контрольних та самостійних робіт

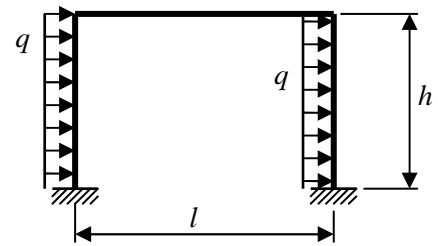
2.1 Розрахунок статично невизначуваних рам методом сил



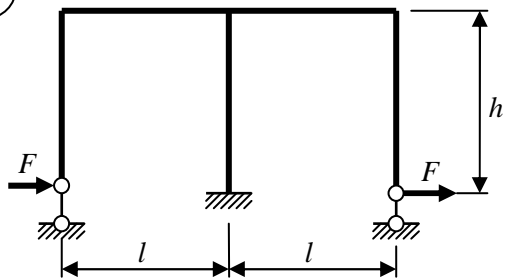
9



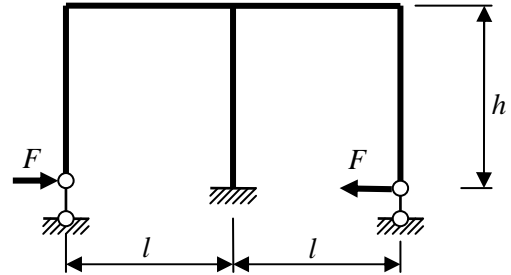
10



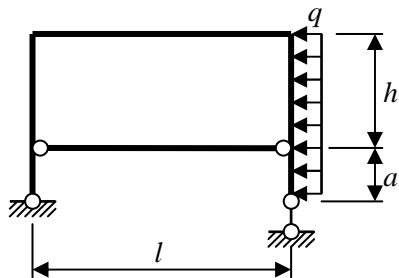
11



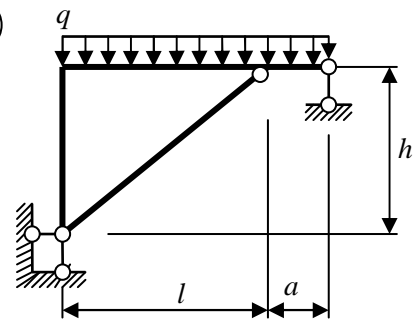
12



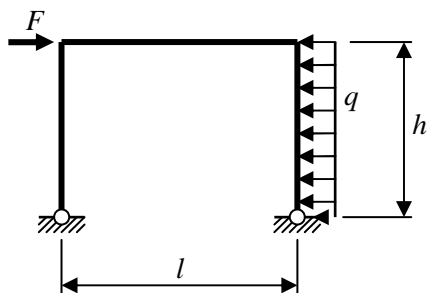
13



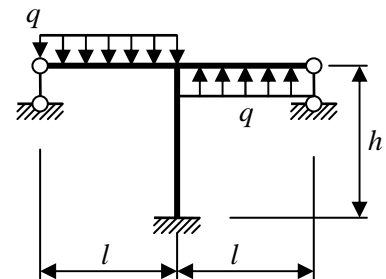
14



15

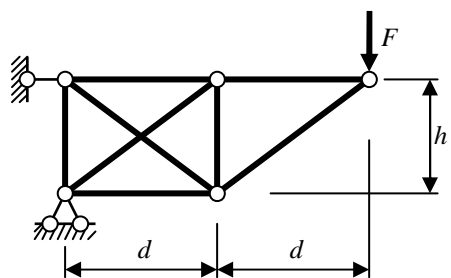


16

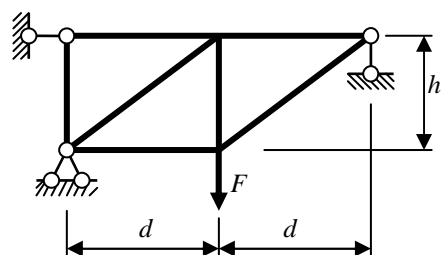


2.2 Розрахунок статично невизначуваних ферм

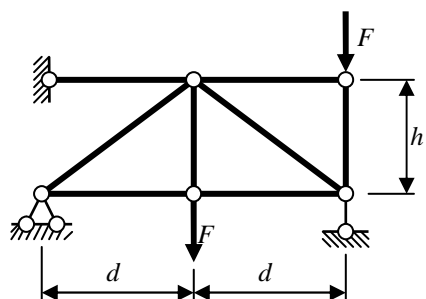
1



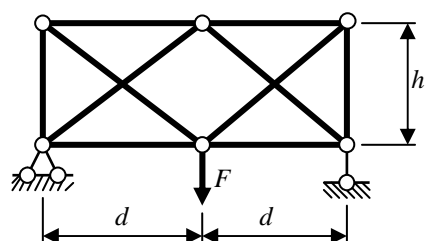
2



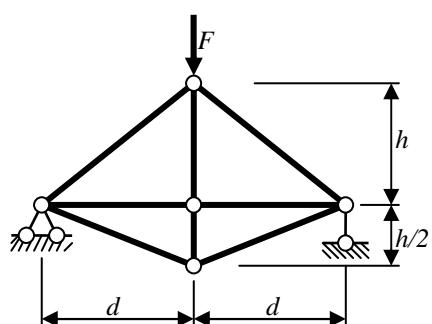
3



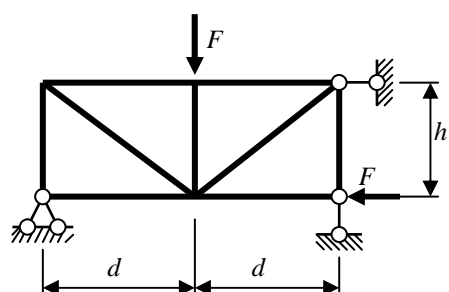
4



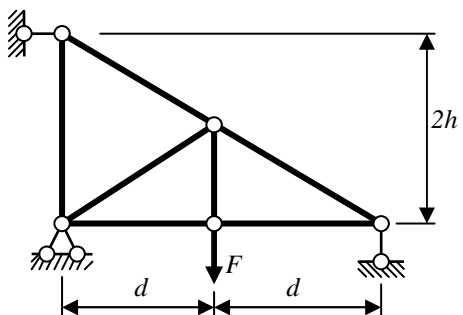
5



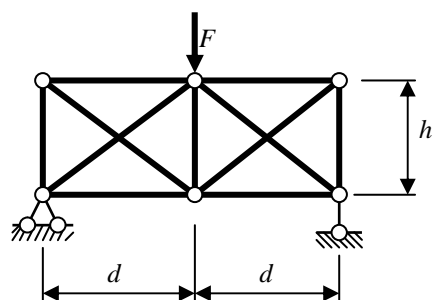
6



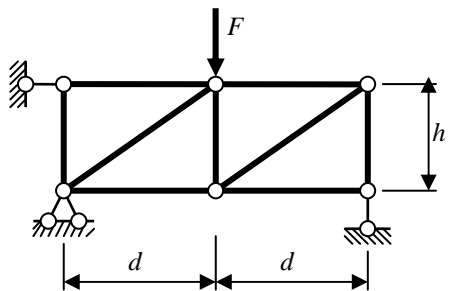
7



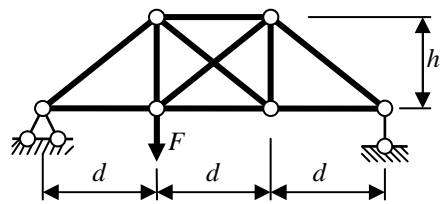
8



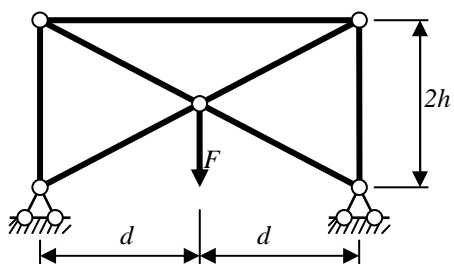
9



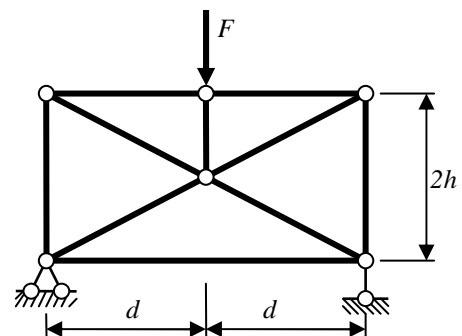
10



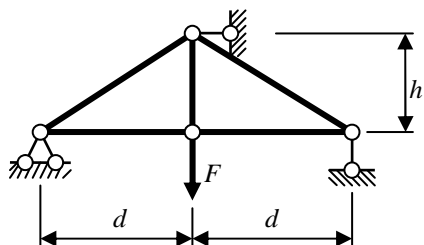
11



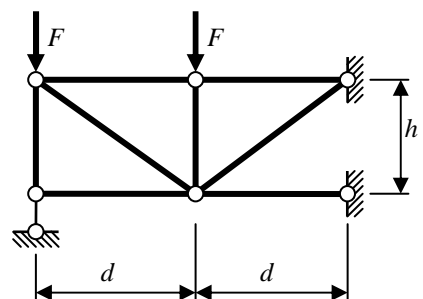
12



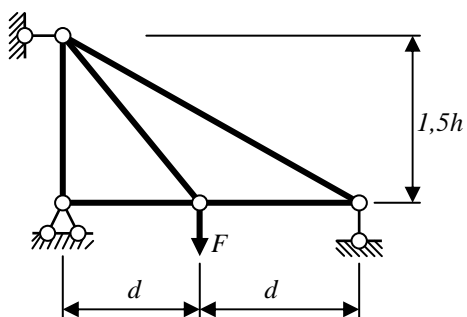
13



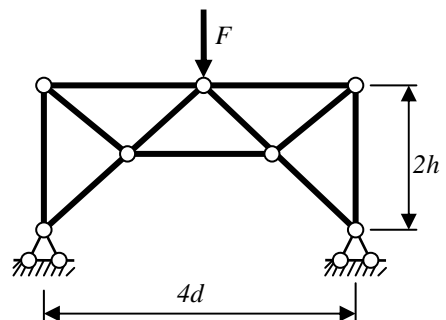
14



15

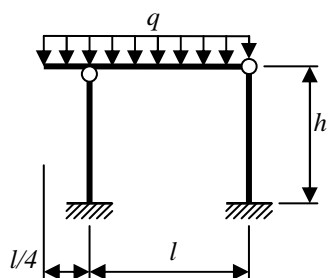


16

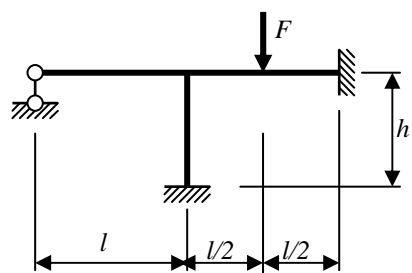


2.3 Розрахунок рам методом переміщень

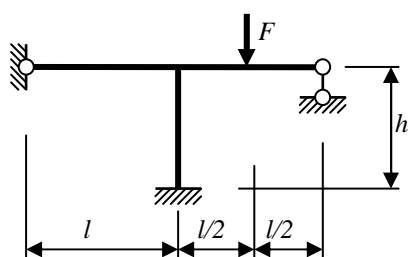
1



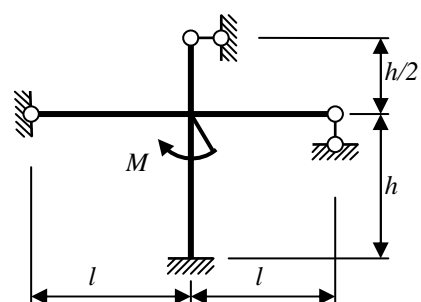
2



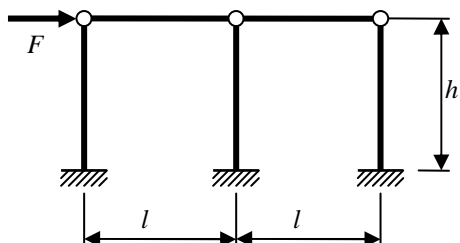
3



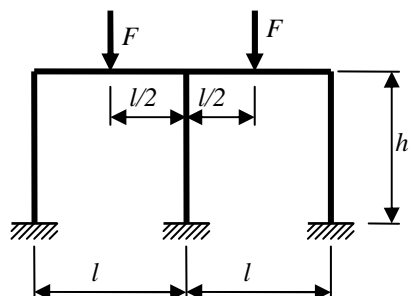
4



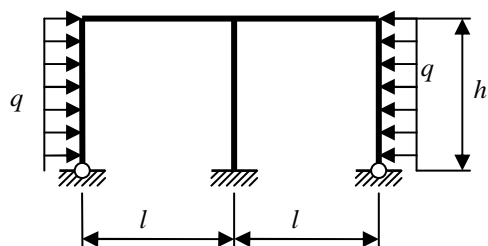
5



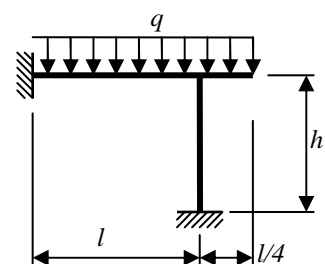
6



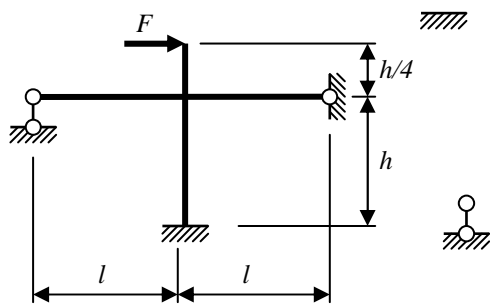
7



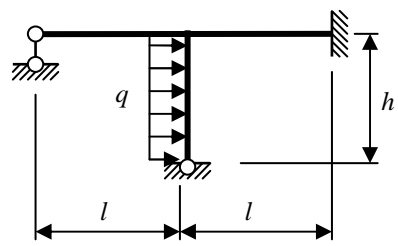
8



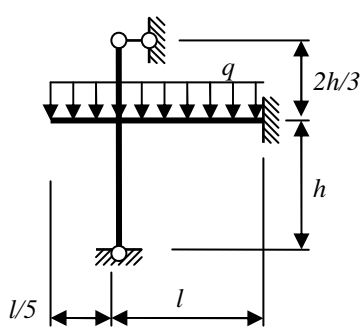
9



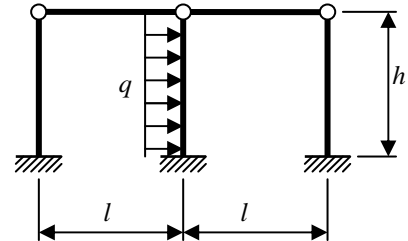
10



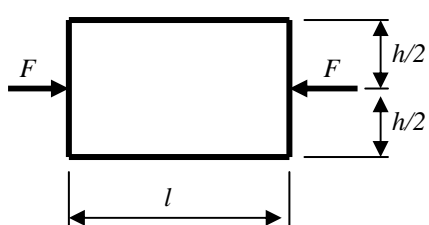
11



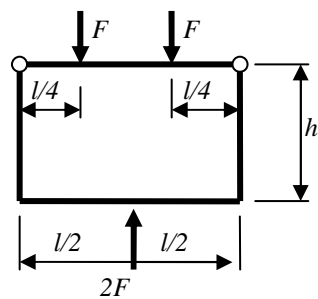
12



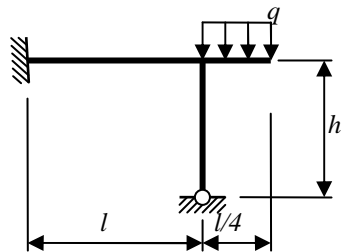
13



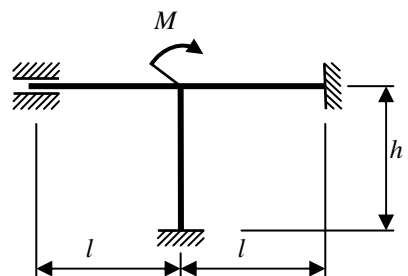
14



15



16



Розділ 3 Розрахунково-графічні роботи

3.1 Розрахунок статично невизначуваної рами методом сил

Для заданої рами необхідно:

- 1) знайти ступінь статичної невизначуваності;
- 2) обрати раціональну основну систему;
- 3) записати канонічні рівняння;
- 4) побудувати епюри згинаючих моментів в основній системі;
- 5) обчислити коефіцієнти та вільні члени канонічних рівнянь;
- 6) розв'язати канонічні рівняння;
- 7) побудувати остаточну епюру згинаючих моментів;
- 8) виконати статичну та кінематичну перевірки епюри моментів;
- 9) побудувати епюри поперечних та поздовжніх сил.

Пункти 5, 6,7 виконати також на комп'ютері.

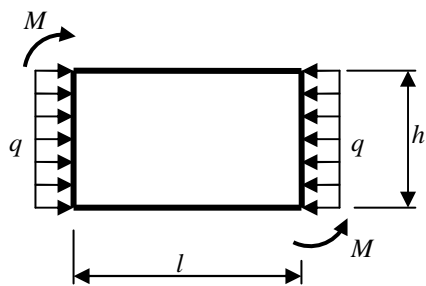
Завдання оформити на листі формату А-2. Рисунки виконувати з додержанням масштабу, обчислення – акуратно.

Вихідні дані взяти з табл. 3.1 та рис. 3.1 за вказівками викладача.

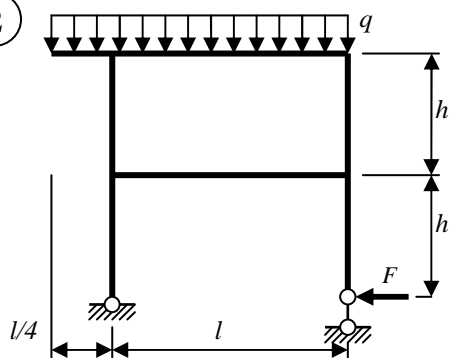
Таблиця 3.1

№ з/п.	l , м	h , м	навантаження			Співвідношення жорсткостей ригелів та стояків
			F , кН	M , кНм	Q , кН/м	
1	3,6	3	30	30	30	1:1
2	3,6	4	20	30	30	2:1
3	4,8	4	30	20	30	3:1
4	4,8	5	30	30	20	4:1
5	6	5	20	20	20	3:2
6	6	6	10	20	20	1:1
7	7,2	6	20	10	20	2:1
8	7,2	7	20	20	10	3:1
9	8,4	7	10	10	10	4:1
10	8,4	8	5	10	10	3:2
11	9,6	8	10	5	10	1:1
12	9,6	9	10	10	5	2:1
13	10,8	9	5	5	5	3:1
14	10,8	10	2	5	5	4:1
15	12	10	5	2	5	3:2
16	12	8	5	5	2	1:1

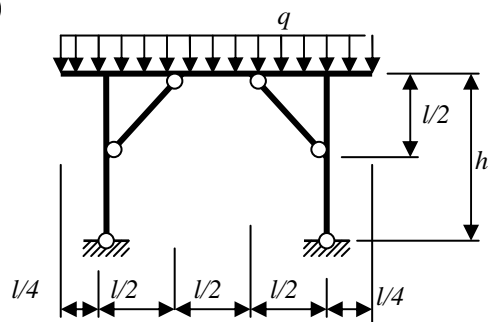
1



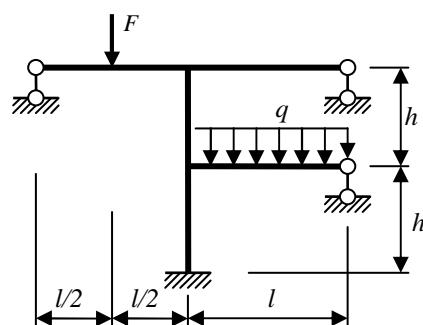
2



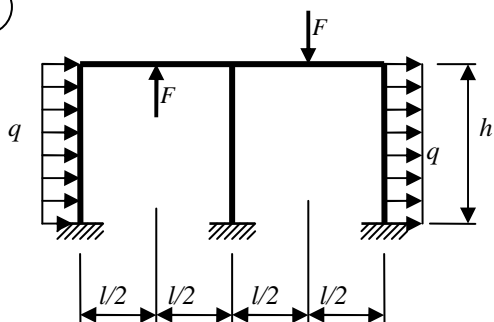
3



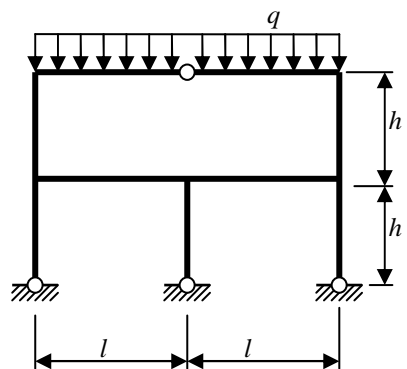
4



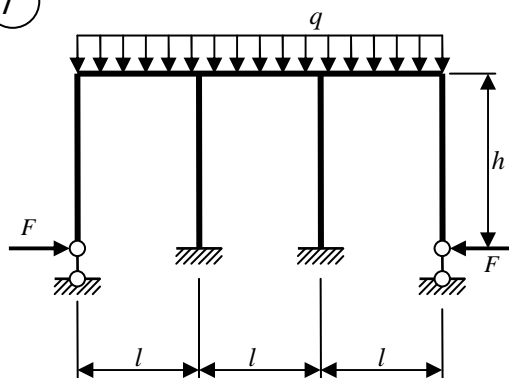
5



6



7



8

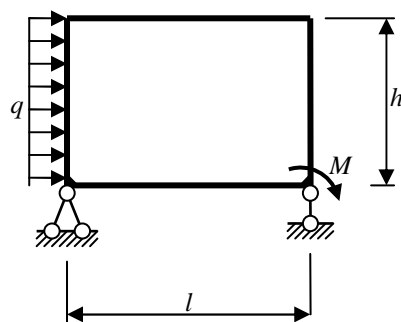
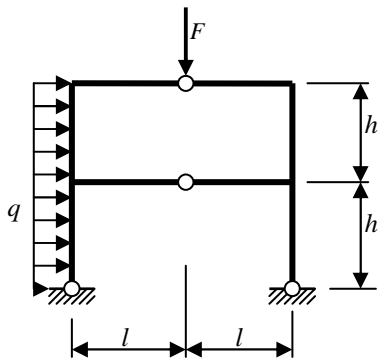


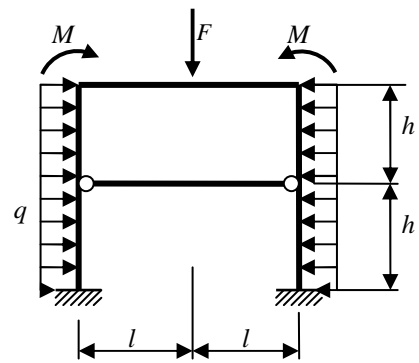
Рис. 3.1

Рис. 3.1 (закінчення)

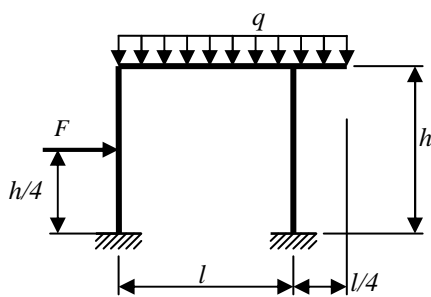
9



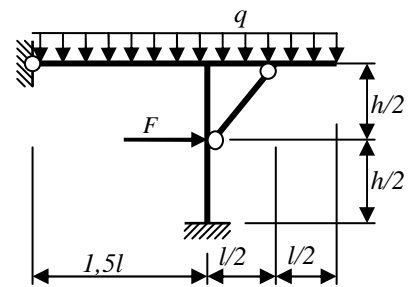
10



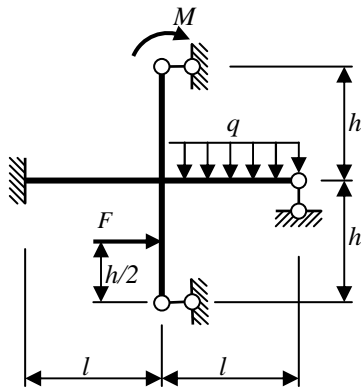
11



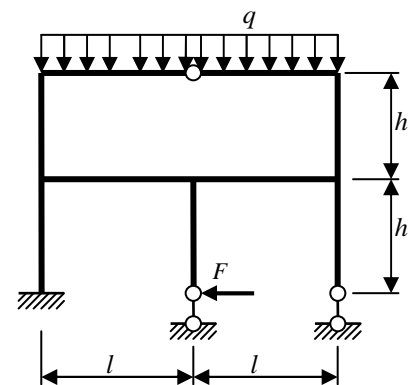
12



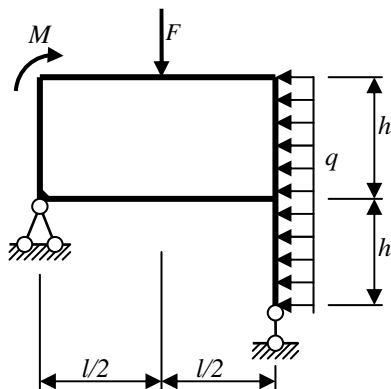
13



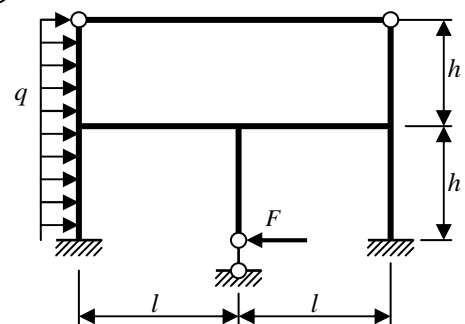
14



15



16



3.2 Розрахунок статично невизначуваної ферми

Для заданої ферми необхідно:

- 1) визначити ступінь статичної невизначуваності;
- 2) обрати основну систему метода сил;
- 3) записати канонічні рівняння;
- 4) знайти зусилля в стержнях основної системи від заданого навантаження та одиничних невідомих;
- 5) обчислити коефіцієнти та вільні члени канонічних рівнянь;
- 6) розв'язати систему канонічних рівнянь;
- 7) обчислити остаточні зусилля в стержнях ферми;
- 8) виконати перевірку розрахунку.

Розрахунок виконати в табличній формі. Пункти 5, 6, 7 виконати за допомогою комп'ютера.

Завдання оформити на листі формату А-2. Рисунки виконувати з додержанням масштабу, обчислення – акуратно.

Вихідні дані взяти з табл. 3.2 та рис. 3.2 за вказівками викладача.

Для усіх схем, крім 13 та 15, навантаження рівномірно розподілене вздовж верхнього пояса. Для схем 13 та 15 навантаження рівномірно розподілене вздовж правої половини верхнього пояса.

Таблиця 3.2

№ з/п	d , м	h , м	$EA_{в.п.}:EA_{н.п.}:EA_{реш.}:EA_{шпр.}$	$q, kH/м$
1	3,0	3,5	1,8:1,2:1,0:0,8	10
2	3,1	3,4	1,8:1,3:1,0:0,9	11
3	3,2	3,3	1,8:1,3:0,9:0,9	12
4	3,3	3,2	1,8:1,5:1,0:0,8	13
5	3,4	3,1	1,8:1,5:0,9:0,7	14
6	3,5	3,0	1,8:1,6:1,2:1,0	15
7	3,6	4,1	1,8:1,6:1,0:1,1	16
8	3,7	4,0	1,8:1,6:1,1:0,8	17
9	3,8	3,9	2,0:1,5:1,1:1,1	18
10	3,9	3,8	2,0:1,5:1,1:0,9	19
11	4,0	3,7	2,0:1,6:1,0:0,9	20
12	4,1	3,6	2,0:1,6:1,2:1,0	21
13	4,2	4,5	2,0:1,6:0,9:1,0	22
14	4,3	4,3	2,0:1,7:1,0:0,9	23
15	4,4	4,4	2,0:1,5:0,9:0,9	24
16	4,5	4,5	2,0:2,1:1,3:1,1	25

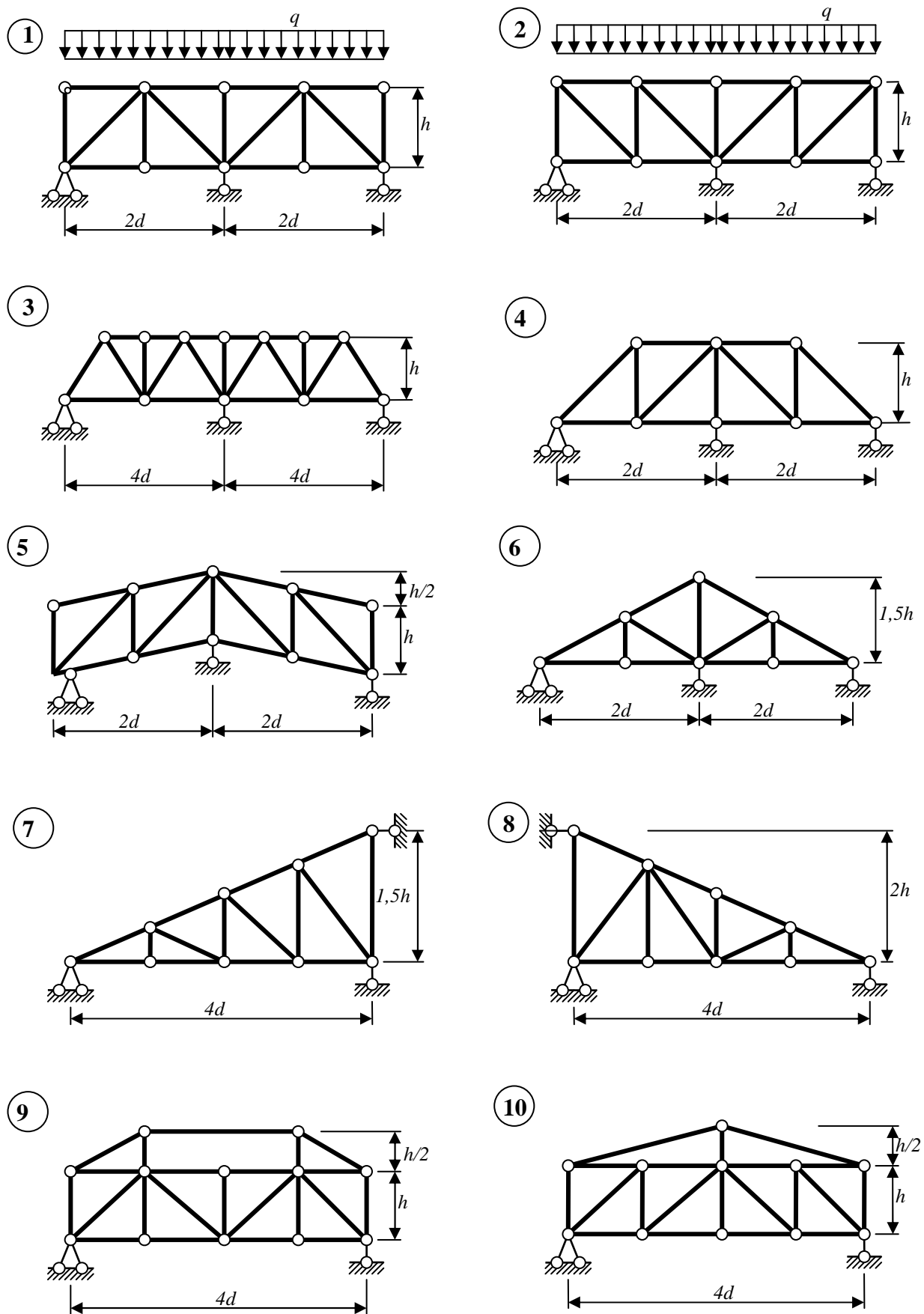
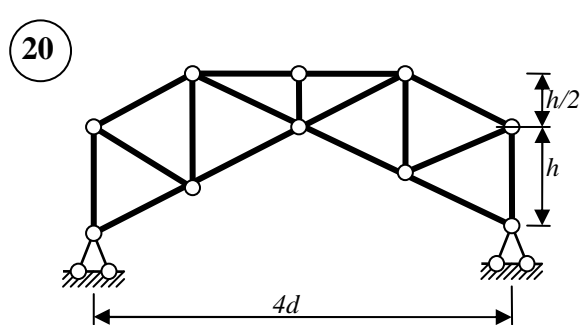
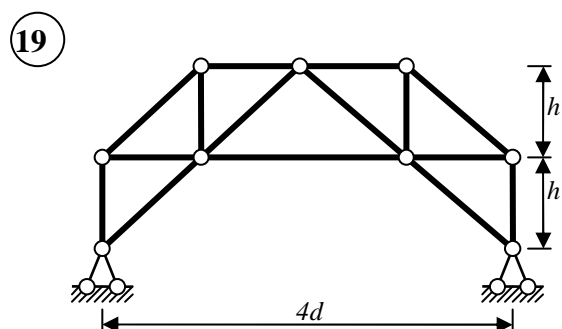
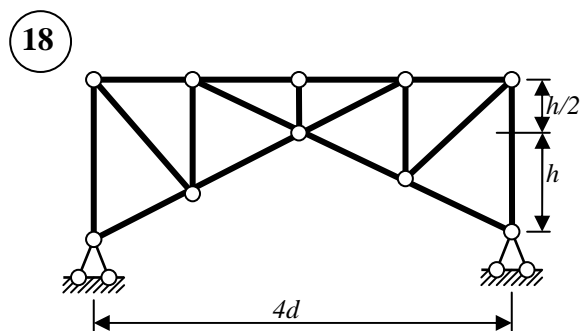
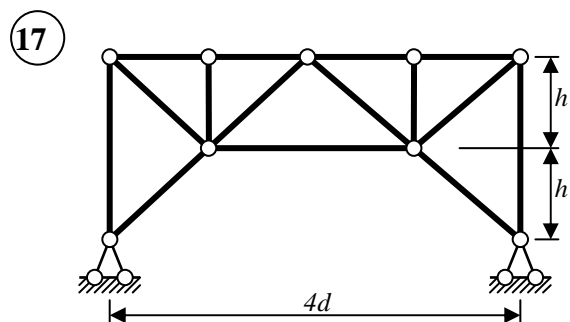
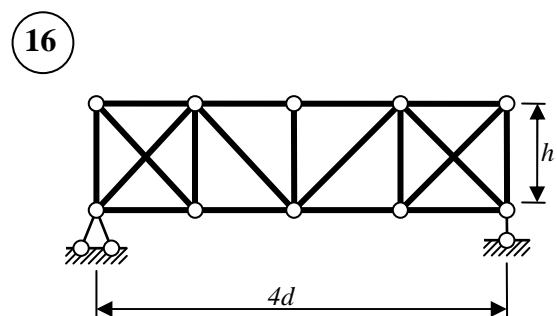
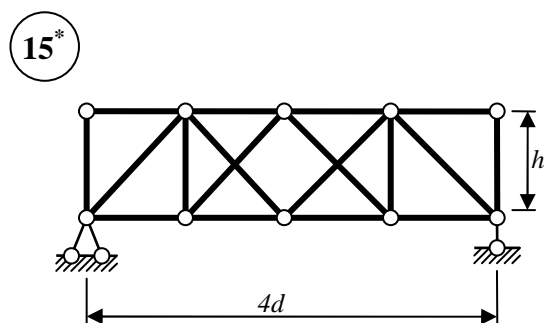
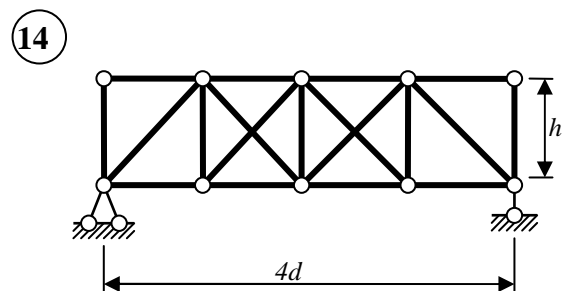
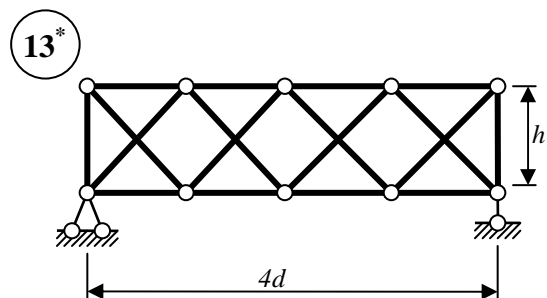
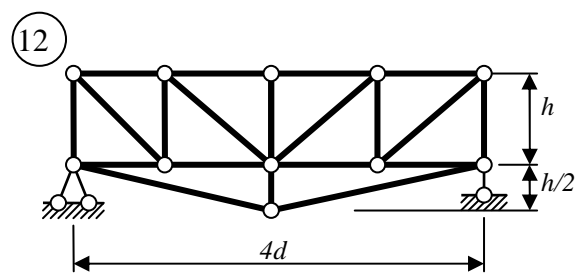
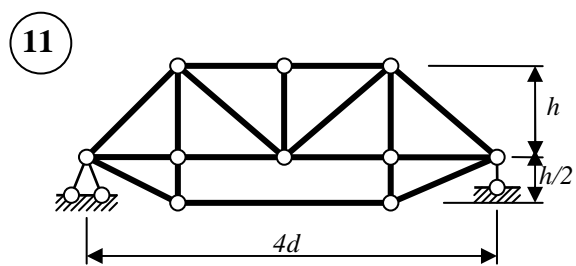


Рис. 3.2

Рис. 3.2 (закінчення)



3.3 Розрахунок рами методом переміщень

Для заданої рами необхідно:

- 1) визначити ступінь кінематичної невизначуваності;
- 2) обрати основну систему метода переміщень;
- 3) записати канонічні рівняння;
- 4) побудувати епюри згинаючих моментів в основній системі;
- 5) обчислити коефіцієнти та вільні члени канонічних рівнянь;
- 6) розв'язати систему канонічних рівнянь;
- 7) побудувати остаточні епюри внутрішніх зусиль;
- 8) виконати перевірку розрахунку.

Вихідні дані взяти з табл. 3.3 та рис. 3.3 за вказівками викладача.

Таблиця 3.3

№ з/п	$l, м$	$h, м$	$F, кН$	$q, кН/м$	$I_1:I_2:I_3$
1	6	5	20	15	4:1:1
2	5	7	10	20	4:1:2
3	4	5	30	18	4:2:3
4	7	6	15	12	4:2:2
5	8	6	40	30	2:1:1
6	6	8	30	25	3:2:1
7	5	6	20	10	3:1:1
8	8	7	20	20	3:1:2
9	8	5	5	10	4:3:2
10	8	8	10	15	4:3:1
11	4	5	30	20	2:2:1
12	4	6	40	25	2:2:2
13	4	3	20	12	4:2:2
14	5	4	10	8	4:2:2
15	5	6	30	16	4:2:1
16	5	8	30	20	4:2:3
17	6	6	5	4	4:1:2
18	8	7	25	10	2:1:2
19	4	5	20	14	2:1:1
20	8	10	15	10	3:2:1
21	4	5	5	8	3:1:1
22	6	7	10	12	4:3:2
23	5	7	40	10	4:3:1
24	7	6	30	20	3:2:1

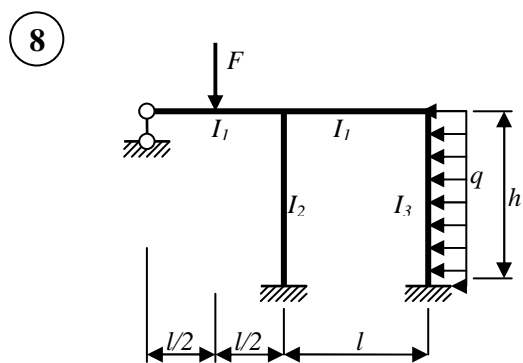
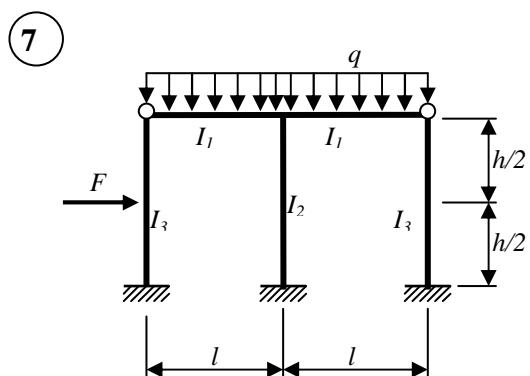
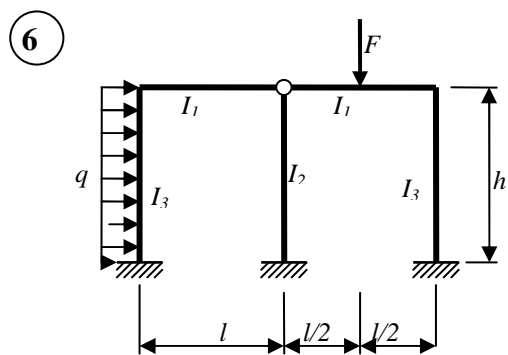
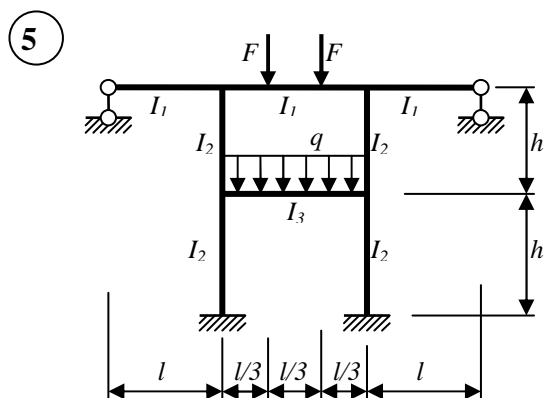
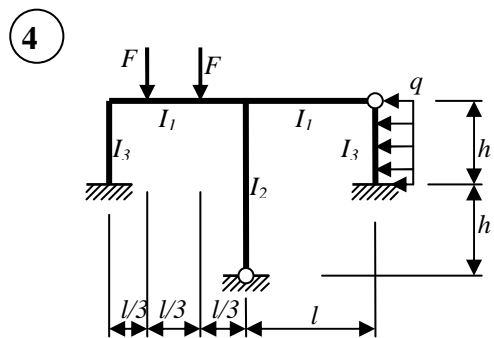
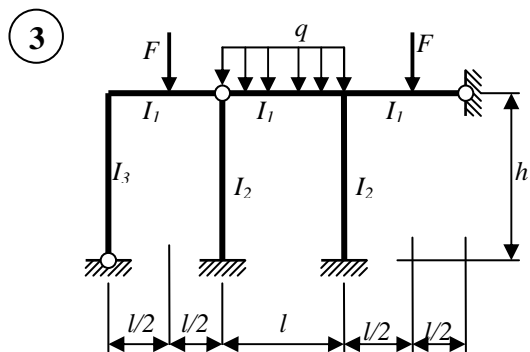
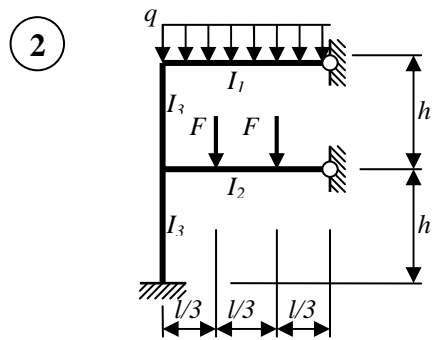
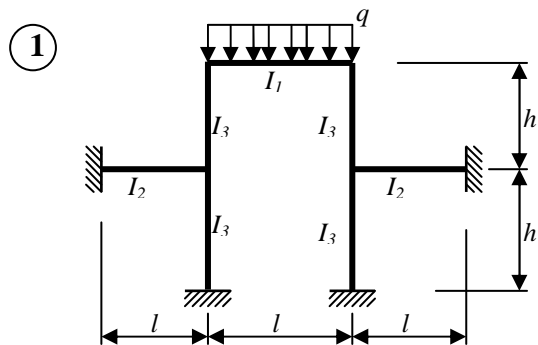


Рис. 3.3

Рис. 3.3 (продовження)

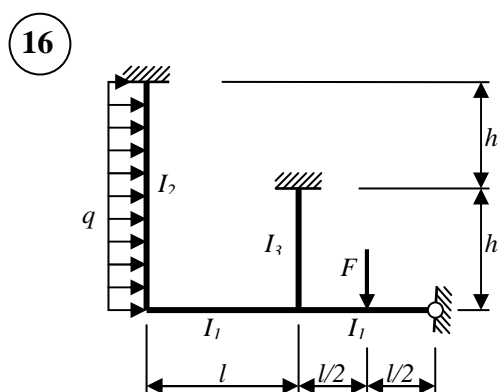
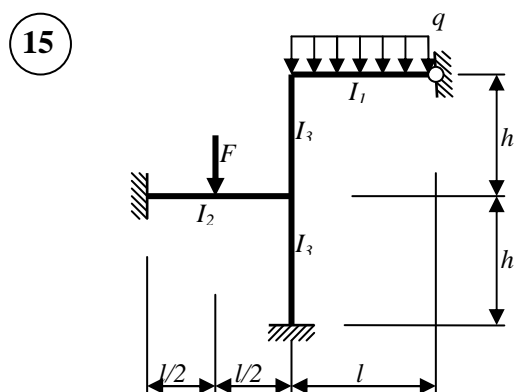
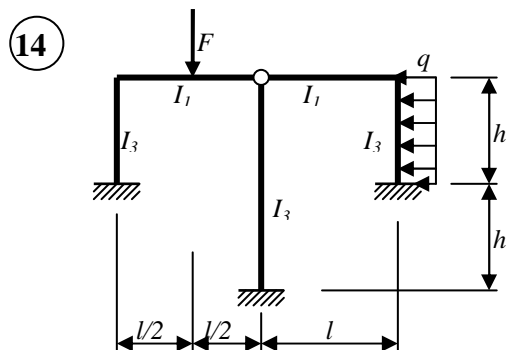
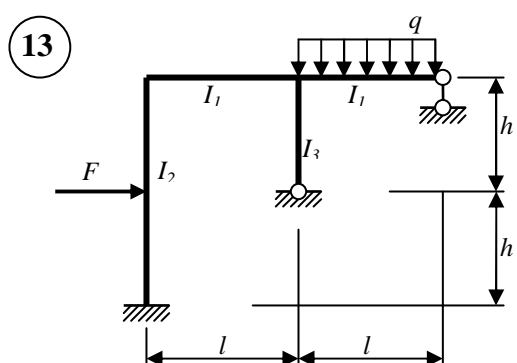
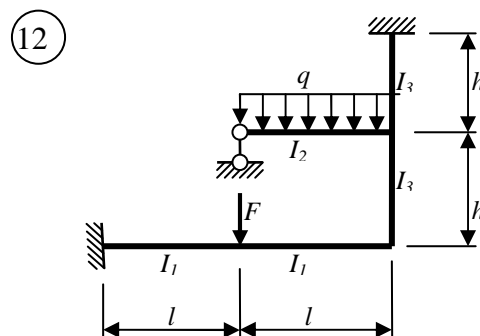
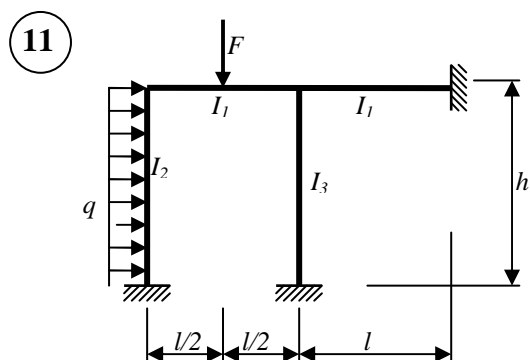
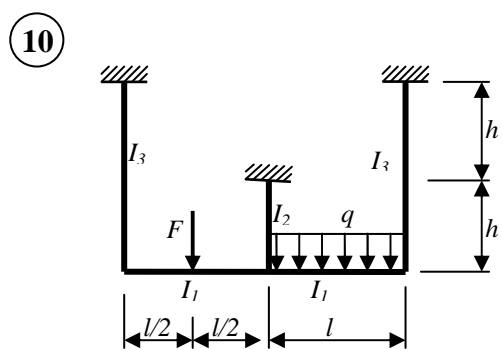
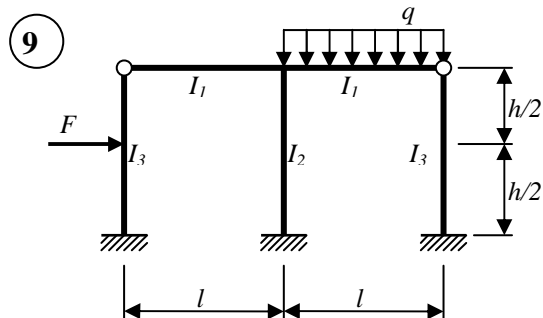
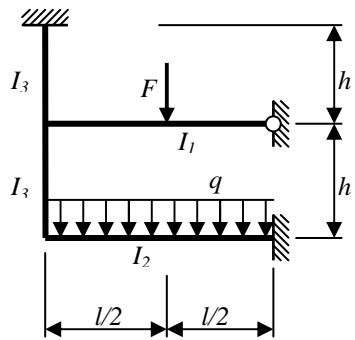
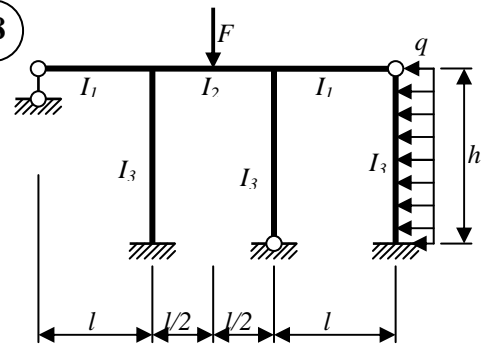


Рис. 3.3 (закінчення)

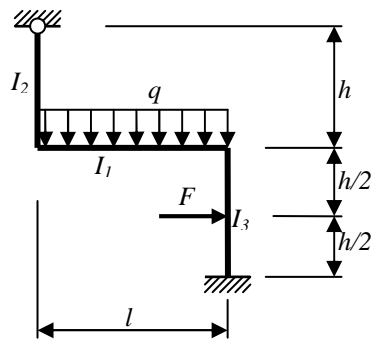
17



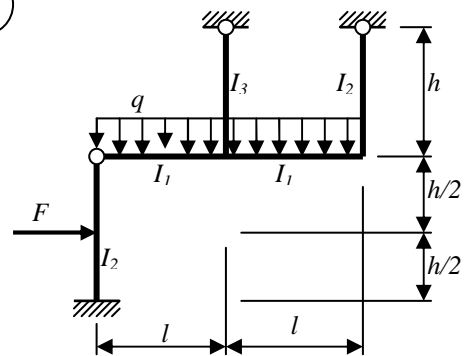
18



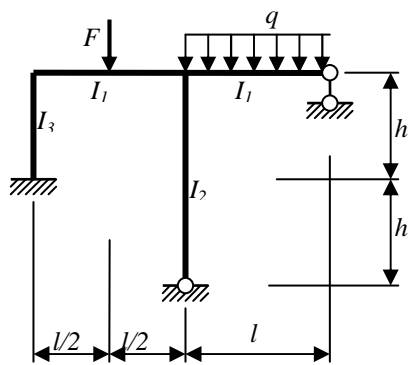
19



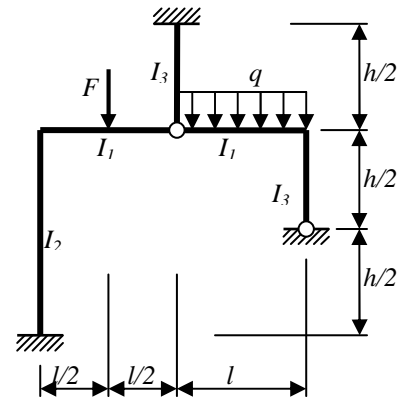
20



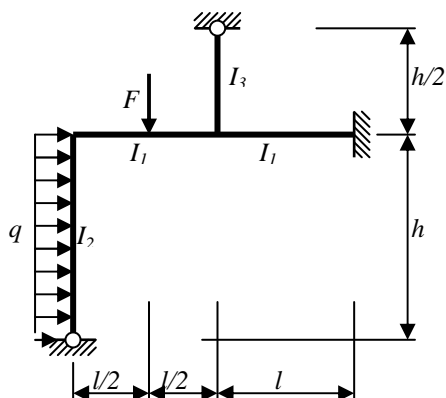
21



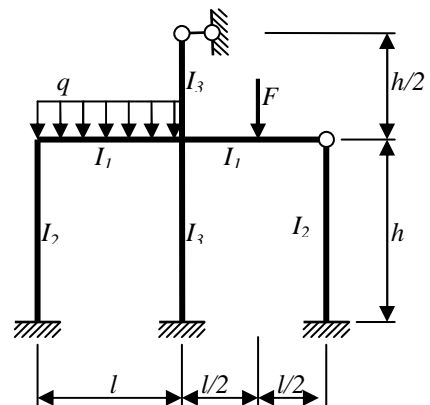
22



23



24



Список джерел

1. **Баженов В.А.** Будівельна механіка. Комп'ютерні технології./ В. А. Баженов., А. В. Перельмутер, О. В. Шишов /За заг. ред. д.т.н., проф. В. А. Баженова. – К.: Каравела, 2009. – 696с.
2. **Шпачук В. П** Конспект лекцій з курсу «Будівельна механіка спецкурс» /частина 1 (для студентів 3, 4 курсів денної і заочної форм навчання бакалаврів за напрямом 6.060101 – «Будівництво») / В. П. Шпачук, М. А. Засядько - Харків, ХНАМГ, 2012. – 64с.
3. **Шутенко Л. М.** Конспект лекцій для студентів 3-го курсу денної і заочної форм навчання бакалаврів за напрямом 6.060101 – «Будівництво» / Л. М. Шутенко, В. П. Шпачук., М. А. Засядько. - Харків, ХНАМГ, 2012. – 169с.
4. **Шутенко Л. М.** Механіка споруд. Керівництво до практичних занять / Л. М. Шутенко, В. П. Пустовойтов, М. А. Засядько. – Харків, ХДАМГ, 2002. – 239 с.
5. **Шутенко Л. Н.** Строительная механика: Краткий курс / Раздел 2. Статически неопределимые системы. / Л. Н. Шутенко, В. П. Пустовойтов, Н. А. Засядько – Харьков, ХГАГХ, 2003. – 85 с.
6. **Строительная механика** / Под ред. Ю. И. Бутенко. – К.: Вища школа, 1989. – 479 с.
7. **Строительная механика.** Стержневые системы: учебник для вузов / А. Ф. Смирнов, А. В. Александров, Б. Я. Лащеников, Н. Н. Шапошников; Под ред. А. Ф. Смирнова. – М.: Стройиздат, 1981. – 512 с.
8. **Баженов. В. А.** Будівельна механіка. Розрахункові вправи. Задачі. Комп'ютерне тестування. Навчальний посібник. – К.: Каравела, 2010.
9. **Чихладзе Э. Д.** Строительная механика: Учебник для студентов высших учебных заведений. – Харьков: УкрГАЗТ, 2004. – 305 с.

Навчальне видання

Методичні вказівки
до практичних занять, самостійної роботи,
виконання контрольних і розрахунково-графічних завдань
з курсу

БУДІВЕЛЬНА МЕХАНІКА СПЕЦКУРС

ЧАСТИНА 1

*(для студентів 3, 4 курсів денної і заочної форм навчання бакалаврів за
напрямом 6.060101 - «Будівництво»)*

Укладач: **ЗАСЯДЬКО** Микола Андрійович

Відповідальний за випуск *А. О. Гарбуз*

За авторською редакцією

Комп'ютерне верстання *І. В. Волосожарова*

План 2014, поз. 112 М

Підп. до друку 06.06.2014
Друк на ризографі
Тираж 50 пр.

Формат 60*84/16
Ум. друк. арк. 3,3
Зам. №

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК 4705 від 28.03.2014